



在“倍”概念建构中发展学生模型意识

——人教版教材三年级上册“倍的认识”的教学思考与实践

□ 陈坤华¹ 何优优²

【摘要】“倍”是表达两个量之间关系的数学概念,也是一个表征量与量之间关系的数学模型。教师结合“倍”的教学内容与学情基础,分析“倍”模型的学习起点,通过“设计从经验到模型的学习活动,建构‘倍’模型”和“在解决问题中巩固‘倍’模型,凸显模型的应用”,探索“倍”模型的教学策略,发展学生的模型意识。

【关键词】“倍”模型;倍的认识;模型意识

《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称“2022年版课标”)指出,模型意识是对数学模型普适性的初步感悟,数学模型可以用来解决一类问题,是数学应用的基本途径。“倍”是表达两个量之间关系的数学概念,也是一个表征量与量之间关系的数学模型。教学中,如何引导学生经历“倍”模型的建构过程?如何引导学生借助“倍”模型解释、解决具体问题,感受模型应用的意义?如何借助“倍”模型发展学生的模型意识?本文对上述问题进行了相关的实践研究。

一、寻源:分析“倍”模型的学习起点

学习是引导学生从原有经验出发,积累新的经验的过程。在学习“倍的认识”内容之前,学生对两个量之间关系的认识主要停留在“比多比少”层面,即相差关系。倍作为一种比率关系,与相差关系之间有一定的联系(如表1)。

表1 相差关系与倍数关系的异同

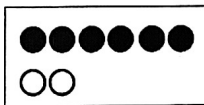
异同比较	相差关系	倍数关系
相同点	两个量之间的比较	
不同点	多(少)的部分	一个数中包含了几个另一个数
	“绝对”值,结果表示一个数量	相对值,结果表示一种率
	直观	抽象

比较两个数量的大小有两种基本方法,一种是比较它们的相差关系(相差问题),另一种是比较它们的倍数关系(倍数问题)。实践表明:表示相差关系的结果是一个具体的量,学生对此具有丰富的生活经验,更容易理解;表示倍数关系时是将一个量确定为标准量,通过判断另一个量(比较量)里面有多少个标准量来比较,这样的关系较为抽象,学生第一次接触,理解起来有一定的困难。从知识的生长性来看,倍、分数(表示率)、百分数、比等概念的本质都是“比率”,因此,“倍的认识”是后续诸多学习内容的基础,对于引导学生探索比率关系有着重要的认知价值与学习意义。

那么,对于倍的关系表征,学生在学习前又有怎样的认知基础呢?对此,笔者进行了两个方面的前测。

(一)关系理解的基础调研

【测评题】如图,黑圆个数和白圆个数有什么关系?



以176名三年级学生(使用人教版教材)为测试对象,前测结果如表2所示。



表2 学生对两量间关系理解的调查结果

水平层次		黑圆个数和白圆个数的关系	人数	百分比
不能表示两个量之间的关系	水平0:没有表示出两种圆之间的关系	① <u>每包都是2个</u> ② <u>每包也是可以是3个</u>	25	14.20%
能表示两个量之间的关系	水平1:用相差表示关系	① _____ ② _____	95	53.98%
	水平2:用倍表示关系,但表达不恰当	<u>黑圆个数比白圆的个数多3倍</u>	8	4.55%
	水平3:用倍表示关系,表达恰当	① _____	36	20.45%
	水平4:同时用相差和倍表示关系	① <u>我这样想,黑圆是白圆的3倍。</u> ② <u>我这样想,黑圆比白圆多2倍。</u>	12	6.82%

前测数据表明:约14.20%的学生不清楚两种圆个数间的关系指的是什么,不能从关系的角度看待相关数量。约85.80%的学生能清楚写出两者的相差关系或倍数关系,知道“关系”表示什么,并能用具体的量表达两者间的关系。其中,约60.80%的学生能用完整的语言表达两量的相差关系。由此可见,学生对两量间的相差关系有较好的认知基础。约31.82%的学生面对直观的学习材料,能用倍来表示两个量之间的关系(包括用倍表达不恰当的情况),这表明近三分之一的学生对“倍”的概念有认知基础。

(二)“倍”关系模型的认知调研

【测评题】你知道“倍”吗?能用自己的方法表示出3倍吗?

以42名三年级学生(使用人教版教材)为测试对象,前测结果如下。

前测结果中出现了4种典型结果(如图1)。被测学生中,有31人能画出类似作品①的结果,约占总人数的73.81%;只有11人能用自己的方法正确

表示出3倍(作品②、作品③、作品④),约占总人数的26.19%。从前测结果可以看出,学生理解“几个几”的意义,已经具备学习倍的相关知识;但只有少数学生听说过倍,对倍的概念较为模糊。

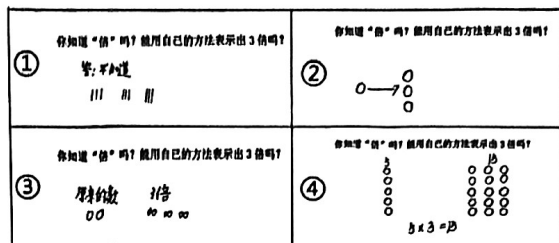


图1

基于上述分析,教师应从学生经验出发,通过多种操作性活动,并借助几何直观,帮助学生丰富“用倍表示关系”的表象,逐步实现知识的结构化,从而抽象出表示关系的“倍”模型,为今后学习分数、百分数、比等相关知识打好基础。

二、探径:探索“倍”模型教学策略

数学模型有两种基本的表征方式:一是思维表征,它体现在思维过程中,具有隐性特征;二是形式表征,它反映在模型的形式表达中,具有显性特征。“倍”是一个较为抽象的数学模型,不仅需要形式上的归纳,还需要思维方法上的理解。^[1]在教学实践中,可以从以下几个方面进行尝试。

(一)设计从经验到模型的学习活动;建构“倍”模型

教师要让学生经历分析、思考、归纳、推理等数学活动,并在活动过程中积累丰富的学习经验,从而形成模型意识。“倍”模型的建构也不例外。教学时,教师可以通过两个层次的数学活动,引导学生经历将学习经验转化为“倍”模型的过程。

1. 经历多维的数学活动,体验“倍”模型的建构过程

◆活动一:由个人经验上升到集体感悟

(1)教师展示学生的前测作品——图1中的学生作品②、作品③和作品④。

(2)引导学生圈一圈,说一说谁是谁的3倍,初步感知“3倍”。



(3)组织全班学生再次创造:画出不一样的“3倍”,丰富“3倍”的表征。

(4)先组织全班学生反馈交流,分享不同的“3倍”作品(如图2)。再提问:为什么画法不同,却都可以表示“3倍”?最后引导学生体会:3倍就是一个数量中包含3份另一个数量。

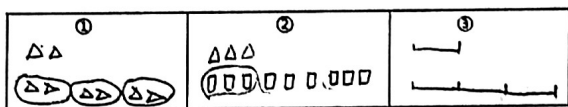


图2

此学习活动将学生的个人经验拓展为集体感悟,让学生充分经历动手操作、语言描述、画图表征、算式表征等归纳过程,揭示倍表示量与量之间关系的本质,初步建立“倍”模型。

◆活动二:于变与不变中明晰“倍”模型

(1)教师出示图3:胡萝卜有2根,红萝卜有6根,白萝卜有12根。



图3

(2)让学生根据信息,提出数学问题并解答。

①红萝卜的根数是胡萝卜的几倍?

②白萝卜的根数是胡萝卜的几倍?

③白萝卜的根数是红萝卜的几倍?

(3)变换情境,集体交流。

①标准量不变,对比量变化:如果小兔子吃掉了2根白萝卜,白萝卜的根数是胡萝卜的几倍?再吃掉2根呢?

②标准量变化,对比量不变:如果小兔子吃掉了1根红萝卜,白萝卜的根数是红萝卜的几倍?再吃掉4根呢?

教师通过设计这样的不同情境,改变两个比较量的大小,让学生在“变化”中进一步认识“倍”模型,感受倍数关系中标准量的重要性,感悟找倍数关系时要明确“谁和谁进行比较”。

2. 借助几何直观,体验“倍”模型的抽象过程

2022年版课标指出,建立形与数的联系,构建数学问题的直观模型,有助于把握问题的本质,明晰思维的路径。数学抽象是对各个具体情境的一种超越。^[2]在“倍”模型的建构中,可以通过以下三个不同角度体现抽象过程。

(1)角度一:倍数不变,一份和多份相应变化。如在说一说谁是谁的3倍、创造不一样的“3倍”等数学活动中,通过呈现示意图、线段图等直观表征,让学生认识“标准量变化,比较量随之变化”,从而建立“3倍”的直观模型。

(2)角度二:标准量不变,比较量变化,进一步认识“几倍”。在活动二中,通过吃掉白萝卜的根数等活动,引导学生认识5倍、4倍等,并引导学生思考:你发现了什么?引导学生归纳:白萝卜有这样的几份就是胡萝卜的几倍。教师引导学生借助比较将数量关系直观化,为抽象出“倍”模型提供帮助。基于此,学生更容易理解“1倍”的关系。

(3)角度三:比较量不变,标准量变。在“红萝卜的根数是胡萝卜的几倍”问题的探究中,在胡萝卜个数变化的情况下,让学生通过圈一圈、想一想等直观形式,探究倍数发生变化的原因,感受比较时标准量的重要性。

学生初次接触“倍”模型,因此,教师要引导学生参与数学活动,并利用直观表征,帮助他们理解数学知识的本质,发展模型意识。

(二)在解决问题中巩固“倍”模型,凸显模型的应用

倍作为一个相对抽象的数学概念,学生并不能通过一节课的学习就掌握,需要在后续的学习中加以巩固,深入认识与理解“倍”的概念,发展模型意识。

人教版教材“倍的认识”单元中的练习十一共编排了12道练习题,这些习题主要应用“倍”模型解决两类问题:求一个数是另一个数的几倍和求一个数的几倍是多少。大部分习题都以图文结合的形式呈现。同时还设置了一些开放性习题,目的是