**名校联盟★《新高考研究卷》2024年9月卷**

**《浙江省新高考研究卷》（全国I卷）数学（三）**

**第I卷（选择题 共58分）**

**一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.**

1. 已知集合，，则的元素个数为（ ）

A. 0 B. 1 C. 2 D. 无数

【答案】C

【解析】

【分析】根据集合的元素类型，列方程组求解集即可得元素个数.

【详解】因为集合，，

则联立，解得或，

故，集合中有2个元素.

故选：C.

2. 已知*z*为复数，则是的（ ）条件

A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分又不必要

【答案】C

【解析】

【分析】根据复数的运算，复数的模及充要条件的定义即可判断.

【详解】设，则，

所以，

又，

所以，

所以是的充要条件.

故选：.

3. 函数的最小正周期为（ ）

A.  B.  C.  D.

【答案】B

【解析】

【分析】先将解析式降幂，转化为含有一个三角函数的解析式，即可求得结果.

【详解】



，

则周期，

故选：B.

4. 若，，，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】利用条件概率公式和并事件概率性质求解即可．

【详解】由，，可知，，

又，所以，

所以.

故选：D

5. 已知向量，满足，，则与的夹角为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】掌握平面向量的数量积.

【详解】,

,

,

又,

,即,



,



.

故选：A.

6. 数列满足，则下列，的值能使数列为周期数列的是（ ）

A. ， B. ， C. ， D. ，

【答案】B

【解析】

【分析】由数列的周期性定义，逐项代入验证即可；

【详解】对于A，当时，；当时，；当时，无周期性，故A错误；

对于B，当时，；当时，；当时，所以数列是以2为周期的周期数列，故B正确；

对于C，当时，；当时，；当时，无周期性，故C错误；

对于D，当时，；当时，；当时，无周期性，故D错误；

故选：B.

7. 将100名学生随机分为10个小组，每组10名学生，则学生甲乙在同一组的概率为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】利用古典概型的概率公式和平均分组分配的求解方法解决.

【详解】将名学生随机分成个小组的分法有种分法，

其中甲乙在同一组的分法有种分法，

所以学生甲乙在同一组的概率为，

故选： .

8. 设，，，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】取对数并作差，得到，构造，，求导得到其单调性，求出，又，比较出，又，作商法得到，又，从而得到，所以，综上，.

【详解】由得，故，

同理得，

故

，

又，令，，

则，

故在上单调递减，

且，故，即，

故，则，

而，故，

故，

，

所以，

其中，，

故，

经过计算，，故，

所以，

综上，.

故选：D

【点睛】比大小，经常用到一些放缩技巧，比如以下不等式要熟记，可以达到事半功倍的效果，，，，，等

**二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9. 关于函数，下列说法正确的有（ ）

A. 函数可能没有零点 B. 函数可能有一个零点

C. 函数一定是中心对称图形 D. 函数可能是轴对称图形

【答案】BC

【解析】

【分析】根据三次函数的性质逐一判断即可.

【详解】对于AB，函数是一个三次函数，

其值域为，所以函数至少有一个零点，故A错误，B正确；

对于C，





，

则为定值，

所以函数的图象一定是中心对称图形，故C正确；

对于D，三次函数不可能时轴对称图形，故D错误.

故选：BC.

10. 已知点*M*是抛物线与圆的交点，点*F*为抛物线*C*的焦点，则下列结论正确的有（ ）

A. 的最小值为2

B. 圆*E*与抛物线*C*至少有两条公切线

C. 若圆*E*与抛物线*C*的准线相切，则轴

D. 若圆*E*与抛物线*C*的准线交于*P*，*Q*两点，且，则

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据题意，联立直线与抛物线的方程，结合抛物线与圆的位置关系以及抛物线的性质，对选项逐一判断，即可得到结果.

详解】联立方程组，消去可得，

解得，因为，，所以，

于是，则的最小值为2，故A正确；

此时圆与抛物线只有一条公切线为轴，故B错误；

若圆*E*与抛物线*C*的准线相切，则，即，

到准线的距离为4，所以轴，故C正确；

由可得，则为等边三角形，

又焦点到准线的距离为4，则，故D正确；

故选：ACD

11. 设点*P*为正方体的上底面上一点，下列说法正确的有（ ）

A. 存在点*P*，使得与平面所成角为

B. 存在点*P*，使得点*A*，分别到平面的距离之和等于

C. 存在点*P*，使得点*A*，分别到平面的距离之和等于

D. 存在点*P*，使得与平面所成角为

【答案】ABC

【解析】

【分析】首先要明确正方体的性质以及线面角、点到平面距离的概念.对于线面角，如果直线垂直于平面，那么线面角为.对于点到平面的距离，可以通过等体积法等方法来求解.接下来通过对每个选项的分析来判断其正确性.

【详解】对于A选项，因为正方体中，平面，

当与重合时，平面就是平面.此时平面，

则与平面所成角为，所以A选项正确.

对于B选项，设正方体棱长为，，.

由于，设，到平面的距离分别为，，

为的面积.根据三棱锥体积公式（为底面积，为高），

可得.当为时，，所以B选项正确.

对于C选项，当为时,，到平面的距离之和最小，到平面距离为0,

到平面距离为到平面距离,等于，所以C选项正确.

对于D选项，当为时, 与平面所成角最小，,

则.所以D选项错误.

故选：ABC.

**第II卷（非选择题 共92分）**

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.**

12. 若函数在处取得最大值，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据辅助角公式化简函数解析式，结合正弦函数性质求其最大值，并确定取最大值时自变量的值，由此可求.

【详解】因为，

设，，

则，，

当，时，

即当，函数取最大值，最大值为，

所以，

所以.

故答案为：.

13. 已知：当无穷大时，的值为，记为.运用上述结论，可得\_\_\_\_\_\_.

【答案】.

【解析】

【分析】利用换元法和对数运算性质将所求式子化简为的结构，即可求得.

【详解】令，则，，则，

因为，

则.

故答案为：.

14. 表示不超过*x*的最大整数，设，，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_（用*M*，*N*表示）.

【答案】 ①.  ②. 

【解析】

【分析】结合近似计算以及的含义即可求得第一空答案；利用二项式展开式，结合第一空的近似计算，即可求得第二空答案.

【详解】因为，

故；

又为正整数，

所以

，而，

故，

故答案为：；

【点睛】关键点点睛：解答本题的关键是利用二项式展开式得出为正整数，从而解决问题.

**四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15. 在一次联考中，经统计发现，甲乙两个学校的考生人数都为1000人，数学均分都为94，标准差都为12，并且根据统计密度曲线发现，甲学校的数学分数服从正态分布，乙学校的数学分数不服从正态分布.

（1）甲学校为关注基础薄弱学生的教学，准备从70分及以下的学生中抽取10人进行访问，学生小A考分为68分，求他被抽到的概率大约为多少；

（2）根据统计发现学校乙得分不低于130分的学生有25人，得分不高于58分的有1人，试说明乙学校教学的特点；

参考数据：若，则，，.

【答案】（1）

（2）乙校教学高分人数更多，130分以上学生更多，低分人数更少.

【解析】

【分析】（1）由正态分布确定70分及以下的学生人数，再由古典概率模型即可求解；

（2）由正态分布确定甲校130以上及58分以下人数，对比乙校数据即可判断.

【小问1详解】

由题意可知甲校学生数学得分，

由，

可得，则，

所以分数在70分及以下的学生有，

所以学生小*A*被抽到的概率

【小问2详解】

由，

可得：

所以甲校不低于130分的概率为，

得分不高于58分的概率为，

所以甲校不低于130分有人，得分不高于58分有人，

故乙校教学高分人数更多，130分以上学生更多，低分人数更少

16. 设，分别为双曲线的左、右焦点，过的直线交双曲线于*A*，*B*两点，且.

（1）求的长（用*a*，*b*表示）；

（2）若双曲线的离心率，求证：.

【答案】（1）

（2）证明过程见解析

【解析】

【分析】（1）两点都在双曲线右支上，设，结合双曲线定义表达出其他边长，利用和余弦定理得到方程，求出，得到；

（2）在中，由正弦定理得到，结合（1）中和，得到，在求出，为锐角，故.

【小问1详解】

，故两点都在双曲线右支上，

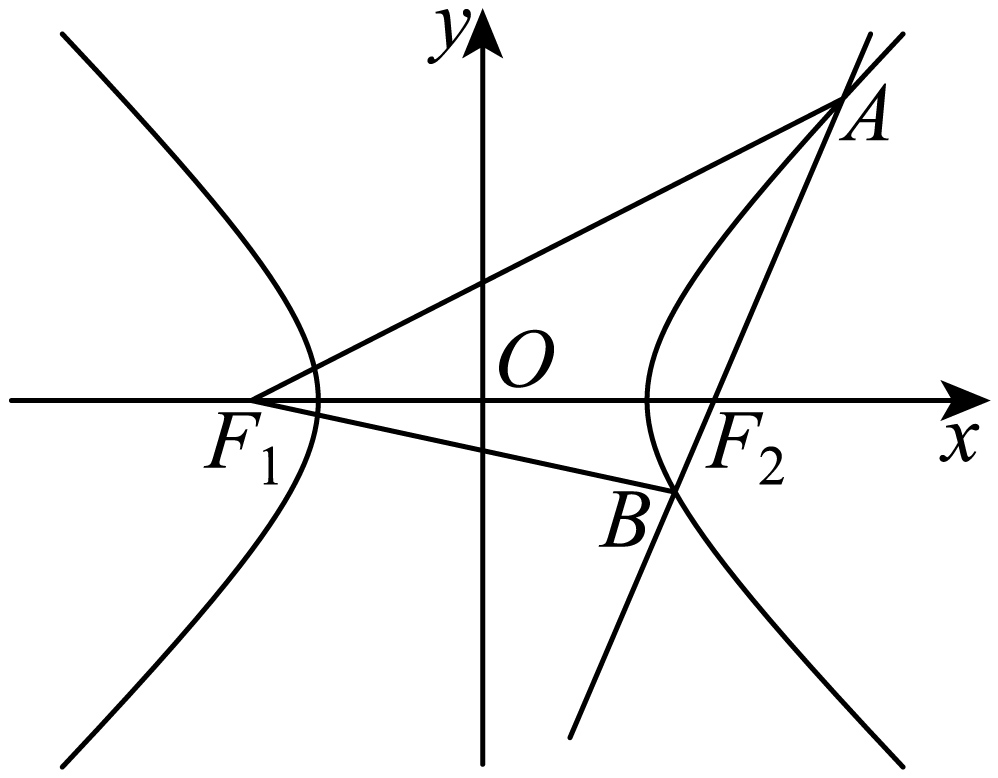
设，则，

由双曲线定义知，，

因为，所以，

由余弦定理得，

化简得，所以；

【小问2详解】

在中，由正弦定理得，

所以，

由（1）知，，故，

又，故，

且，所以，

所以为锐角，故.

17. 设函数.

（1）求函数在处的切线方程；

（2）若恒成立，求证：*m*的最大值与最小值之差大于.

【答案】（1）

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）求导函数，利用导数的几何意义求出切线斜率，然后代入点斜式直线方程化简即可；

（2）令，将恒成立问题转化为恒成立，求导，利用导数研究的单调性，然后求得，进一步构造函数，利用导数研究其单调性，求出的*m*范围，即可证明.

【小问1详解】

由题意，所以切线斜率，

又，所以函数在处的切线方程为，即；

【小问2详解】

令，则，

所以恒成立等价于恒成立，，

当，则在上单调递增，而，不符合题意.

当，由得，

所以当时，在上单调递增，

当时，在上单调递减，

所以，

令，则，又由得，

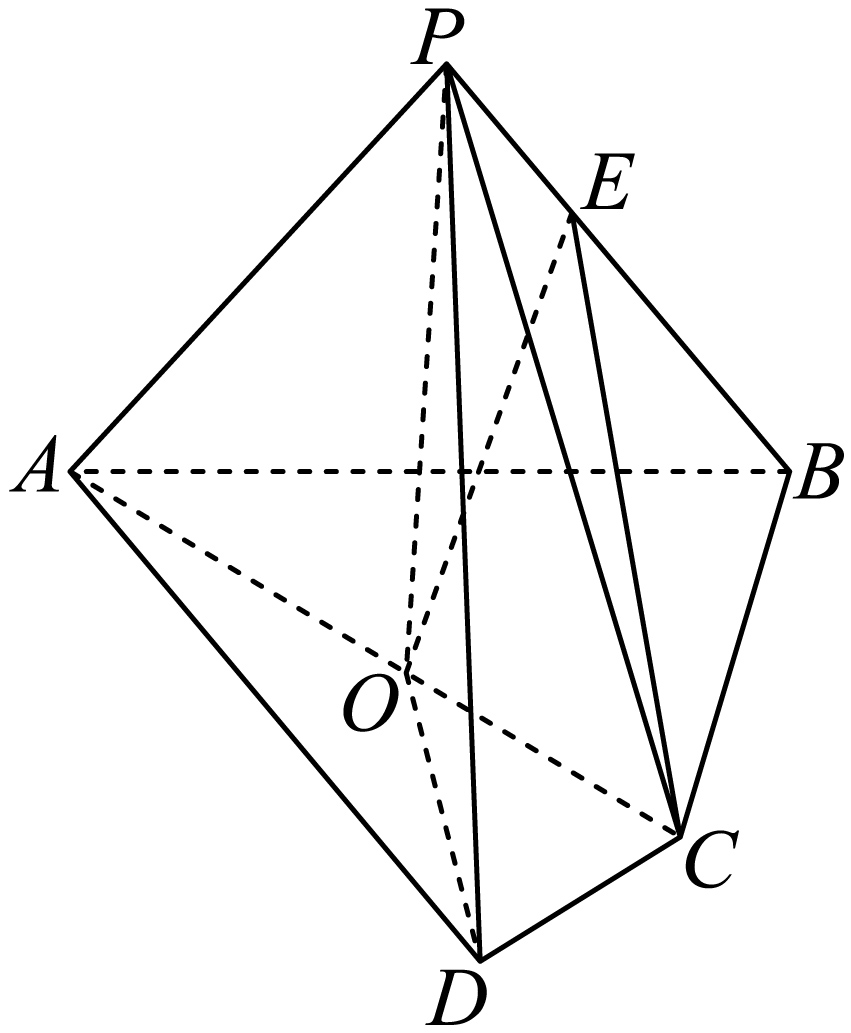
当时，在上单调递减，

当时，在上单调递增，

而，，所以，

所以*m*的最大值与最小值之差大于.

18. 在四棱锥中，，，底面，点*O*在上，且.



（1）求证：；

（2）若，，点在上，平面，求的值；

（3）若，二面角的正切值为，求二面角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析；

（2）；

（3）.

【解析】

【分析】（1）先证明，结合直角三角形性质证明，由此证明，再根据勾股定理证明结论；

（2）连接交于点，根据线面平行性质定理证明，求，根据平行线性质求结论；

（3）建立空间直角坐标系，求平面，平面的法向量，利用向量夹角公式求结论.

【小问1详解】

连接，

因为底面，平面，

所以，即，

又，，所以，

所以，故

又，

所以，，

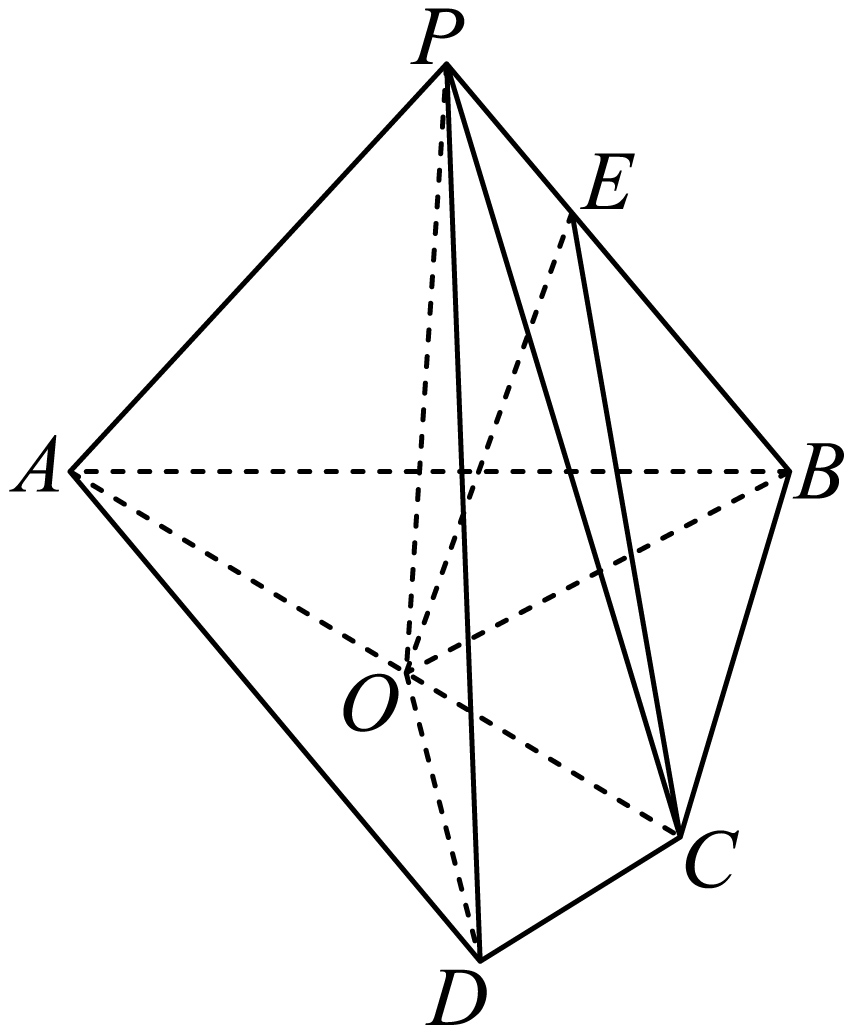
又，所以，

因为底面，平面，

所以，

又，

所以；

【小问2详解】

连接交于点，连，

因平面，平面平面，平面，

所以，故，

因为，，

所以，故四边形是圆内接四边形，

又，所以，

因，，点为的中点，

所以，，

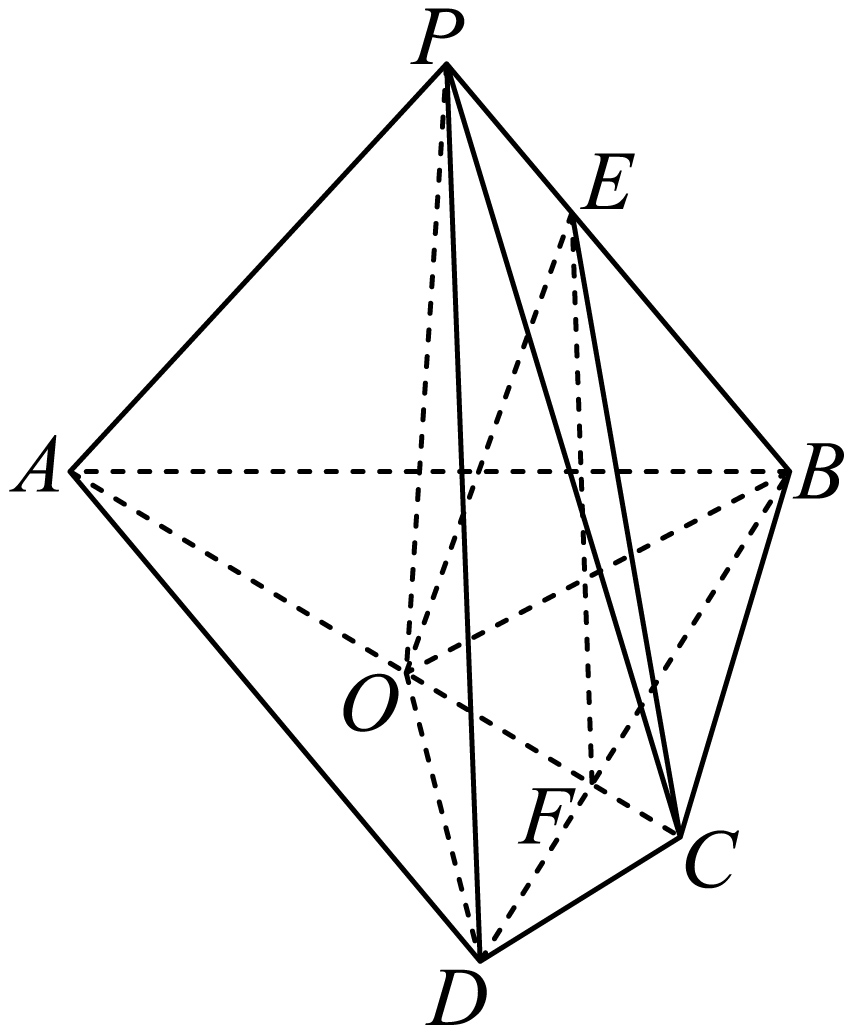
故，设，

则，，

在中，

由余弦定理可得，

所以，于是；

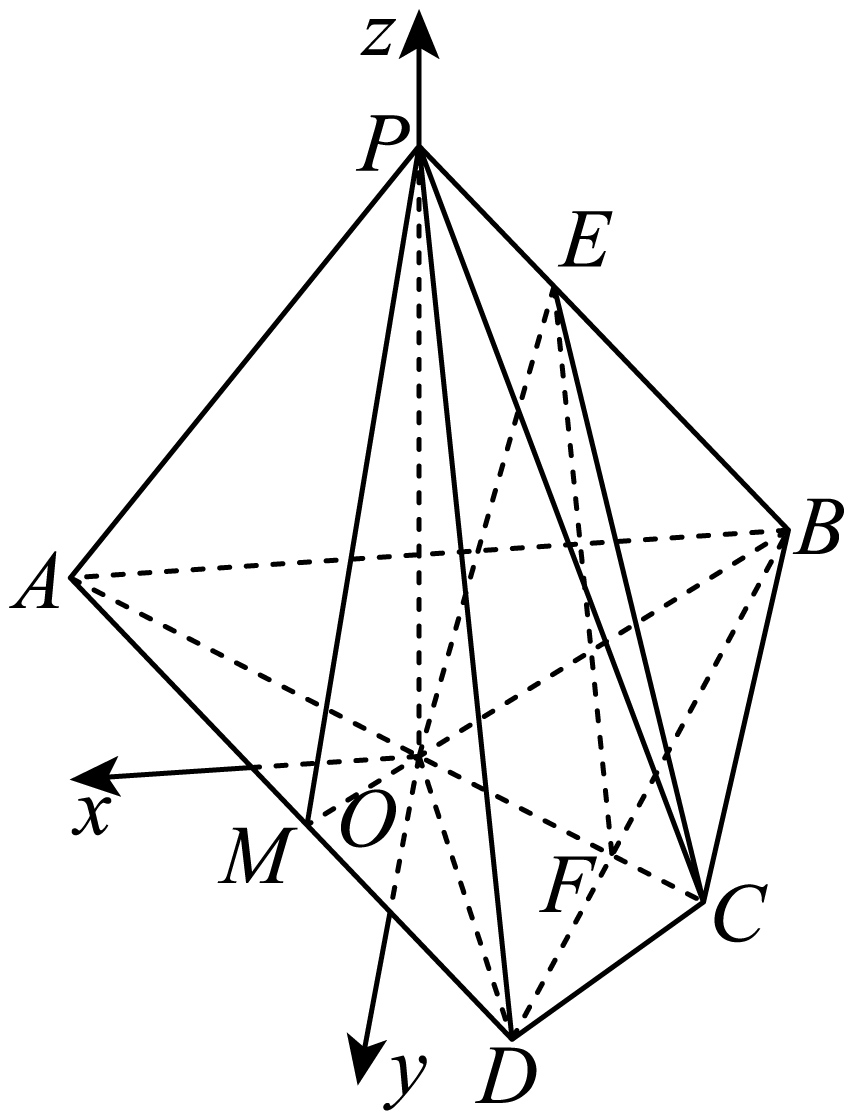
【小问3详解】

以点为原点，，，为，，轴正方向建立如图所示的坐标系，

则  ,

所以 ,

设为平面的法向量,



所以，

故，令，则，

所以为平面的一个法向量，

过点作于，

因为底面，平面，

所以，，平面，

所以平面，平面，

所以，

故二面角的平面角为，

由已知，

所以，于是 ，，

又，所以，又，

所以，故，

所以点的横坐标为，纵坐标为，

所以点的坐标为，

所以，

设平面的法向量，

所以，

两式相减得，

令，则，

所以为平面的一个法向量，,

所以，

观察可得二面角的平面角为锐角，

所以二面角的余弦值为 .

19. 在数列中，，，对满足的任意正整数*m*，*n*，*p*，*q*，都有成立.

（1）若数列是等比数列，求*a*，*b*满足的条件；

（2）若，，设.

①求数列的通项公式；

②求证：.

【答案】（1）

（2）①；②证明见解析

【解析】

【分析】（1）由题意推出，即得，从而可解；

（2）①由条件可推出，结合等比数列通项公式，即可求得答案；

②由题意可得，从而，先证明，再讨论*n*的奇偶性，结合放缩法，即可证明结论.

【小问1详解】

因为数列是等比数列，设其公比为*t*，且满足，

则，结合，可得，

所以，

故，即*a*，*b*满足的条件为；

【小问2详解】

①由，得，

结合，，故，即，

故是以为首项，公比为2的等比数列，

故；

②由①知，故；

先证，即证，

即证，即证，

而恒成立，

故总成立，

当*n*为奇数时，，

即；

当*n*偶数时，，

而 ，

即；

综合上述可知.

【点睛】关键点睛：解答本题的关键在于第二问的数列不等式证明时，要结合分类讨论*n*的奇偶性以及放缩法进行解决.