**湖南2024年高三数学新改革提高训练三**

**（九省联考题型）**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知由小到大排列的个数据、、、，若这个数据的极差是它们中位数的倍，则这个数据的第百分位数是（ ）

A.  B. 6 C.  D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】根据极差和中位数概念得到关于的方程，再利用百分位数的概念即可.

【详解】由小到大排列的个数据、、、，则，

这四个数为极差为，中位数为，

因为这个数据极差是它们中位数的倍，则，解得，

所以，这四个数由小到大依次为、、、，

因为，故这个数据的第百分位数是.

故选：A.

2. 若椭圆的离心率为，则实数的值为（ ）

A.  B. 或4 C. 或8 D. 或6

【答案】C

【解析】

【分析】根据离心率的计算公式，分焦点的位置，讨论即可求解.

【详解】椭圆的标准形式为，

当焦点在轴时， ，解得 ，此时椭圆方程为符合要求，

当焦点在轴时， ，解得 ，此时椭圆为符合要求，

故选：C

3. 各项均不为零的等差数列中，，若，则等于（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据等差数列性质可化简已知等式为，由此可求得，结合即可求得结果.

【详解】数列为等差数列，，

则由得：，又，，

又，.

故选：D.

4. 已知，为两条不同的直线，，为两个不同的平面，则下列说法正确的是（ ）

A. 若，，则

B. 若，，则

C. 若，，，则

D. 若，，，则

【答案】B

【解析】

【分析】根据线线，线面，面面的位置关系，逐一判断选项.

【详解】A. 若，，则与平行，或相交或异面，故A错误；

B. 若，，则，故B正确；

C. 若，，，则与相交或平行，故C错误；

D. 若，，，则，故D错误.

故选：B

5. 第31届世界大学生夏季运动会于2023年7月28日至8月8日在成都举行，比赛项目包括15个必选项目和武术，赛艇，射击3个自选项目.若将3男，3女6名志愿者分成3组，每组一男一女，分别分配到3个自选项目比赛场馆服务，则不同的分配方案共有（ ）

A. 540种 B. 36种 C. 108种 D. 90种

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，将3男、3女6人分成3组，每组一男一女，再将这3组分别分配到3个自选项目，结合排列组合的知识，即可求解.

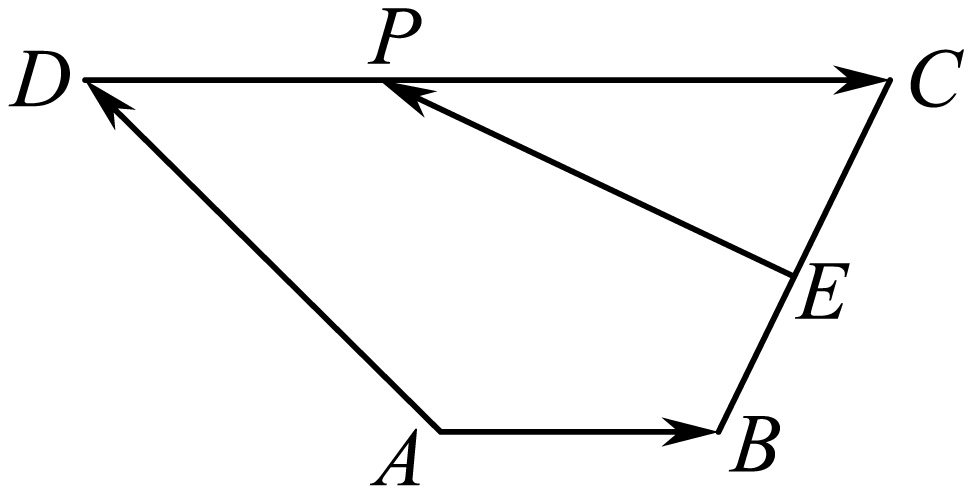
【详解】由题意，将3男、3女6人分成3组，每组一男一女，分组方法有种，

将这3组分别分配到3个自选项目比赛场馆的分配方法有种，

故不同的分配方案共有（种）.

故选：B.

6. 如图,在梯形中, , 为线段上一点,且，为的中点, 若（， ）,则的值为（ ）



A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】直接利用向量的线性运算，化简求得，求得的值，即可得到答案.

【详解】由题意，根据向量的运算法则，可得：





又因为，所以，

所以，故选B.

【点睛】本题主要考查了向量的线性运算及其应用，其中解答中熟记向量的线性运算法则，合理应用向量的三角形法则化简向量是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题.

7. 在中，则的最小值为（ ）

A. 14 B. 16 C. 18 D. 20

【答案】B

【解析】

【分析】利用和差角公式及二倍角公式得到，即可得到，从而得到，再令，则，利用基本不等式计算可得.

【详解】因为，

所以，即，

因为，，

所以



，

所以，

又，所以，

所以

即，

所以，

设，则，显然，，即，

所以

，

当且仅当，即时等号成立，故的最小值为.

故选：B

8. 已知双曲线的左、右焦点分别为、，点在上，点在轴上，，，则双曲线的离心率为（ ）

A.  B.  C.  D. 

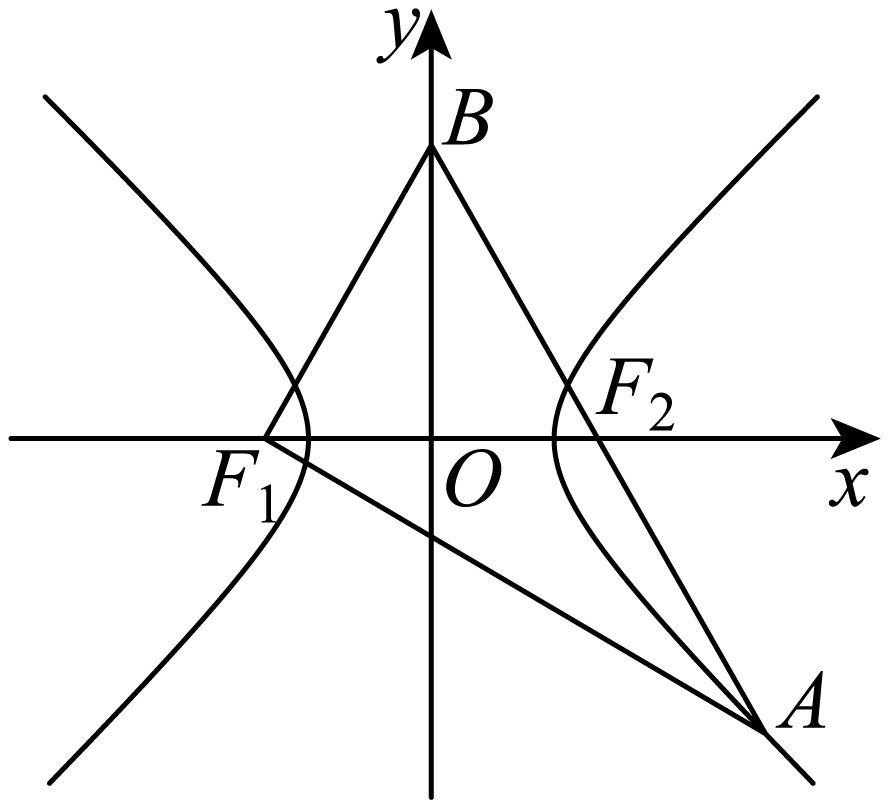
【答案】A

【解析】

【分析】根据直角三角形的性质可得出，推导出为等边三角形，求出、，利用双曲线的定义可求得该双曲线的离心率的值.

【详解】因为，则为线段的中点，

因为，则，则，



因为为的中点，，则，

所以，为等边三角形，

由勾股定理可得，

由双曲线的定义可得，即，

因此，该双曲线的离心率为.

故选：A.

【点睛】方法点睛：求解椭圆或双曲线的离心率的方法如下：

（1）定义法：通过已知条件列出方程组，求得、的值，根据离心率的定义求解离心率的值；

（2）齐次式法：由已知条件得出关于、的齐次方程，然后转化为关于的方程求解；

（3）特殊值法：通过取特殊位置或特殊值，求得离心率.

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.**

9. 已知函数，下列选项中正确的有（ ）

A. 若的最小正周期，则

B. 当时，函数的图象向右平移个单位长度后得到的图象

C. 若在区间上单调递减，则的取值范围是

D. 若在区间上只有一个零点，则的取值范围是

【答案】ACD

【解析】

【分析】利用最小正周期公式可得，可判断A；利用三角函数图象的平移可得，可判断B；利用余弦函数的减区间列不等式组求的取值范围，可判断C；结合在区间上只有一个零点，列不等式组可求的取值范围，可判断D.

【详解】对于A：由的最小正周期可得，又，解得，故A正确；

对于B：当时，，将其图象向右平移个单位长度后，得的图象，故B错误；

对于C：由得，令，

则在区间上单调递减，

于是，解得，即，故C正确；

对于D：因为在区间上只有一个零点，

所以在区间只有一个零点，

于是，解得，即，故D正确.

故选：ACD.

10. 已知复数，，则下列结论正确的有（ ）

A  B.  C.  D. 

【答案】BC

【解析】

【分析】根据复数的运算性质以及模的运算公式对应各个选项逐个判断即可求解．

【详解】设，，其中.

对于选项A: ，所以与不一定相等，故选项A错误；

对于选项B: 因为，

所以，

因为，

所以,故选项B正确；

对于选项C: 因为,

所有

因为，

所以,故选项C正确；

对于选项D:因为，所以

，而与不一定相等,故选项D错误；

故选：BC.

11. 已知函数和其导函数的定义域都是，若与均为偶函数，则（ ）

A. 

B. 关于点对称

C. 

D. 

【答案】BD

【解析】

【分析】用特殊值法，假设，可判断选项A；

对进行变形处理，即可判断其对称性，从而判断选项B；

对两边求导，可得，根据可判断的周期性和对称性，再根据特殊值关系，即可判断选项C；

由特殊值关系得到，，化简，即可判断选项D.

【详解】假设，则，都为偶函数，则所设函数符合题意，此时，所以A错误；

因为为偶函数，所以，即，

令，则，所以关于点对称，故B正确；

因为均为偶函数，所以，所以函数的图象关于直线对称，即，

因为，所以，所以，

所以，，又，，

所以，所以无法确定的值，所以C错误；

又，，所以，又，所以，

由知函数周期为4，则周期也为4，则





，所以 D正确.

故选：BD

【点睛】对称性有关结论：

若，则关于直线对称；

若，则关于直线对称；

若，则关于点中心对称；

若，则关于点中心对称；

周期性结论：

若，则函数的周期为.

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.**

12. 若集合， ，则集合中的元素个数为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】2

【解析】

【详解】集合，均表示的是点集，即曲线上的点构成的集合，则集合即为求两函数图象的交点.

联立方程得：，，由知两函数图象有两个交点，所以集合中元素个数为2.

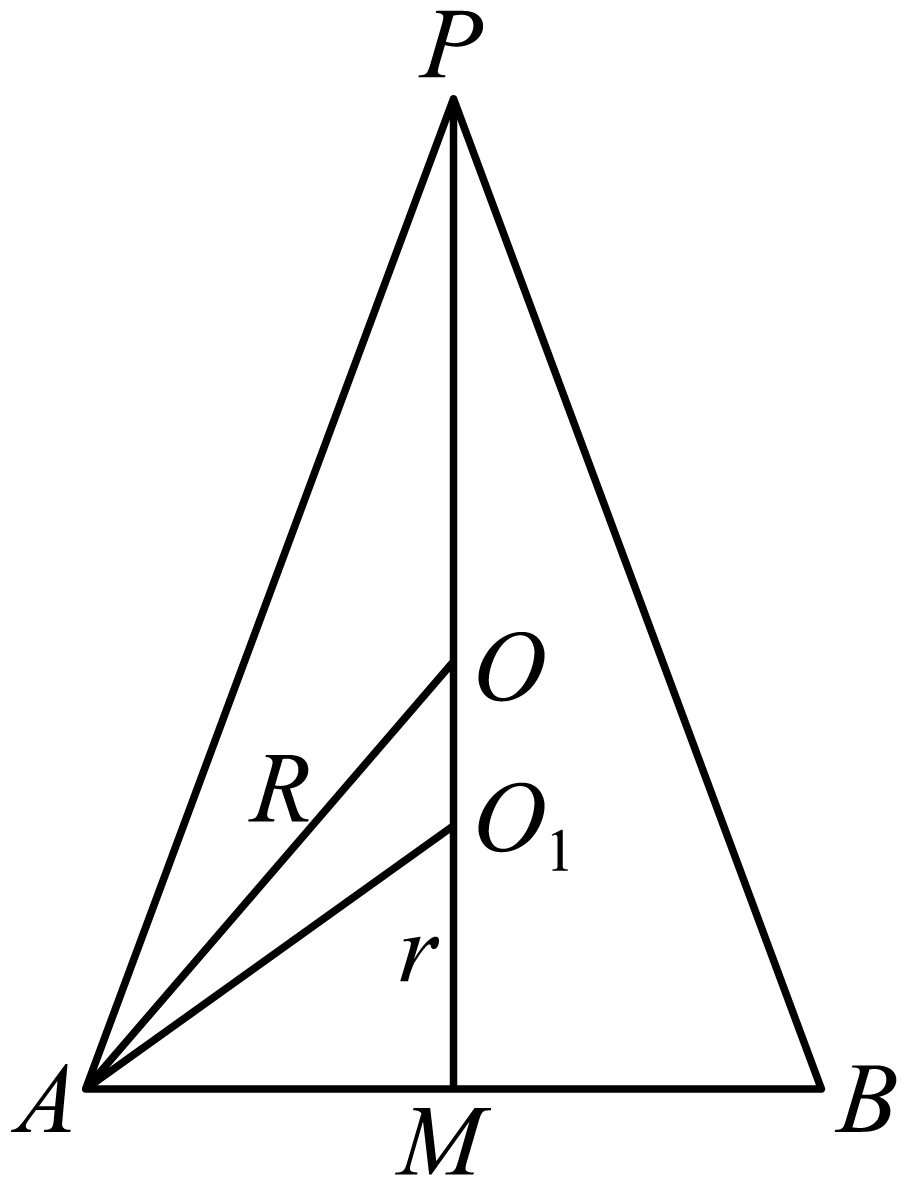
13. 已知圆锥的顶点为，轴截面为锐角，，则当\_\_\_\_\_\_\_\_时，圆锥的内切球与外接球的表面积的比值最大，最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 ①. ## ②. ##

【解析】

【分析】作出图形，设，，为线段的中点，连接，设圆锥的内切球和外接球的半径分别为、，计算出、关于的表达式，结合二次函数的基本性质可求得的最大值及其对应的值，即可得解.

【详解】如下图所示：



不妨设，，为线段的中点，

连接，圆锥的内切球球心为，半径为；外接球球心为，半径为.

圆锥的内切球与外接球的表面积之比为，

在中，，，

，

在中，，，，

即，所以，，

所以，

，

当且仅当时，即当时，等号成立，

所以，圆锥的内切球与外接球的表面积的比值的最大值为.

故答案为：；.

14. 已知正实数满足则当 取得最小值时，\_\_\_\_\_\_

【答案】

【解析】

【分析】设出点之间的距离，由基本不等式求出最值，利用点和圆的位置关系确定自变量取值，代入求解即可.

【详解】设点与点之间的距离为，则，

易知的几何意义是点与点之间的距离的平方，

点在以为圆心，半径为的圆上，又，则，

设点与点之间的距离为，则，

故，当且仅当时取等，

此时取得最小值，由点与圆的位置关系得，此时，

代入得，.

故答案：

【点睛】关键点点睛：本题考查解析几何，解题关键是利用基本不等式找到关于的取值．再利用点与圆的位置关系确定此时也取得最小值，然后将代入目标式，得到所要求的结果即可．

**四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15. 已知函数．

（1）求曲线在处的切线方程；

（2）若函数在处取到极小值，求实数*m*的取值范围．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）求导，即可根据点斜式求解直线方程，

（2）求导，分类讨论的取值，即可结合函数的单调性求解极值.

【小问1详解】

由题意，，则，

又，故所求的切线方程为．

【小问2详解】

由题意，，故．

若，则，故当时，，当时，，

故当时，函数取到极小值；

若，则令，解得或，

要使函数在处取到极小值，则需，即，

此时当时，，当时，，当时，，满足条件．

综上，实数*m*的取值范围为．

16. 为研究一种新药的耐受性，要对白鼠进行连续给药后观察是否出现症状的试验，该试验的设计为：对参加试验的每只白鼠每天给药一次，连续给药四天为一个给药周期，试验共进行三个周期．假设每只白鼠给药后当天出现症状的概率均为，且每次给药后是否出现症状与上次给药无关．

（1）从试验开始，若某只白鼠连续出现次症状即对其终止试验，求一只白鼠至少能参加一个给药周期的概率；

（2）若在一个给药周期中某只白鼠至少出现次症状，则在这个给药周期后，对其终止试验，设一只白鼠参加的给药周期数为，求的分布列和数学期望．

【答案】（1）；（2）分布列见解析，.

【解析】

【分析】（1）利用“正难则反”思想，计算一个给药周期也没有参加完的概率，则至少能参加一个给药周期的概率为；

（2）先计算出一个给药周期内至少出现次症状的概率，然后根据题目条件确定随机变量的可能取值，分别计算每一个值所对应的概率，列出分布列并求出数学期望.

【详解】解：（1）设“一只白鼠至少能参加一个给药周期”为事件，则的对立事件为一个给药周期也没有参加完．

设一次给药出现症状为事件，则一个给药周期也没有参加完的概率为，

所以一只白鼠至少能参加一个给药周期的概率为．

（2）设事件为“在一个给药周期中某只白鼠至少出现次症状”，

则，

则随机变量的取值为．

，

，

，

所以*X*的分布列为

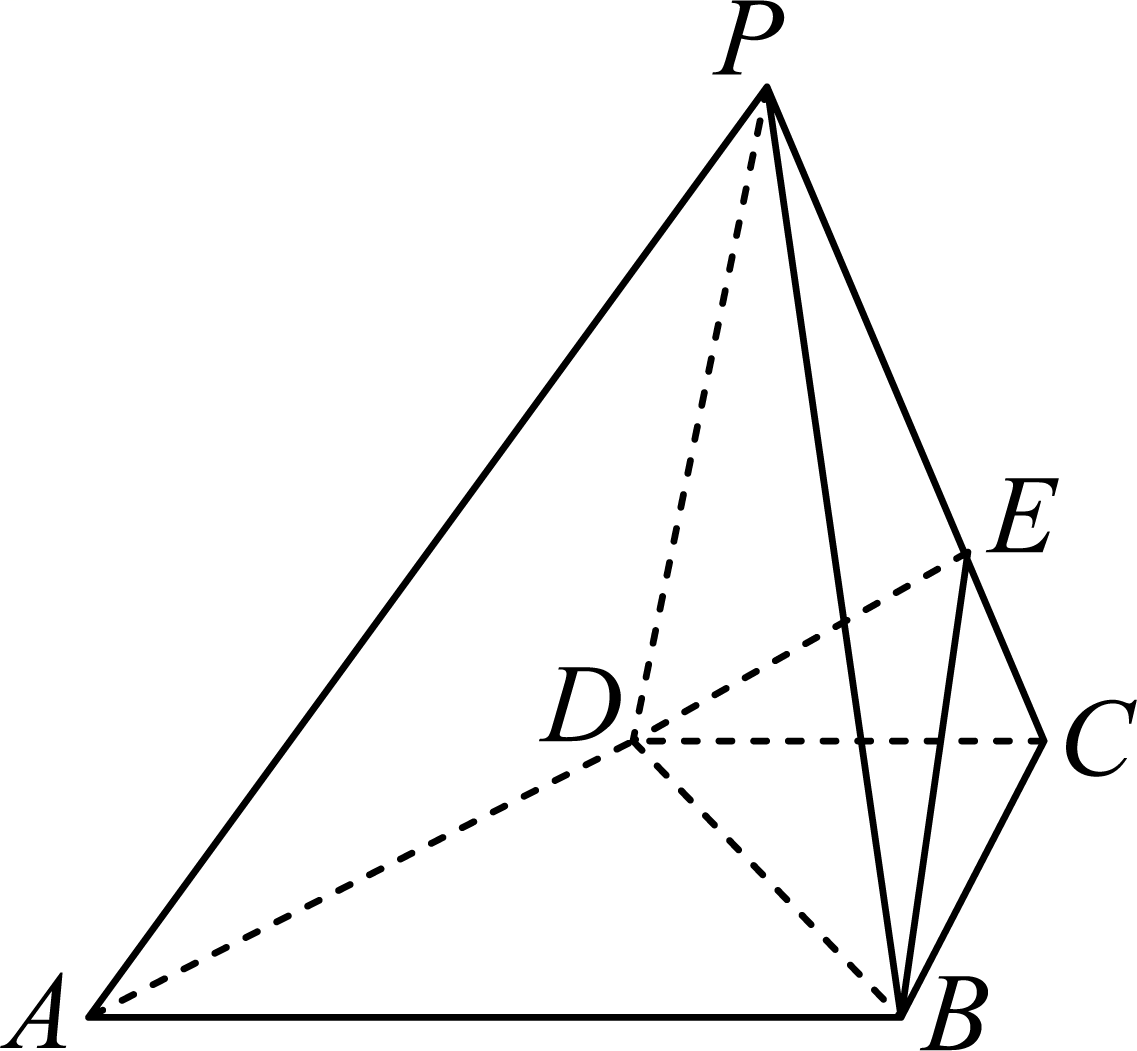
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

所以随机变量的数学期望为．

【点睛】本题考查概率的乘法公式及加法公式，考查随机变量的分布列及数学期望计算，难度一般.解答时易错点如下：  
（1）每次给药相互独立；

（2）在解答第（2）小题时，注意若前一个给药周期能通过，才可以参加下一个给药周期.

17. 如图，四棱锥中，四边形为梯形，其中，．



（1）证明：平面平面；

（2）若，点满足，且三棱锥的体积为，求平面与平面的夹角的余弦值．

【答案】（1）证明见解析;

（2）

【解析】

【分析】（1）利用勾股定理先证，再证平面即可得面面垂直；

（2）根据条件建立合适的空间直角坐标系，根据体积先计算*E*坐标，再利用空间向量求面面角即可.

【小问1详解】

为等边三角形，

，

又四边形为梯形，，则，

根据余弦定理可知，在中，



根据勾股定理可知，，即，

平面，

平面，

又平面平面平面；

【小问2详解】

为中点，，

由（1）可知，平面平面，

又平面平面平面，

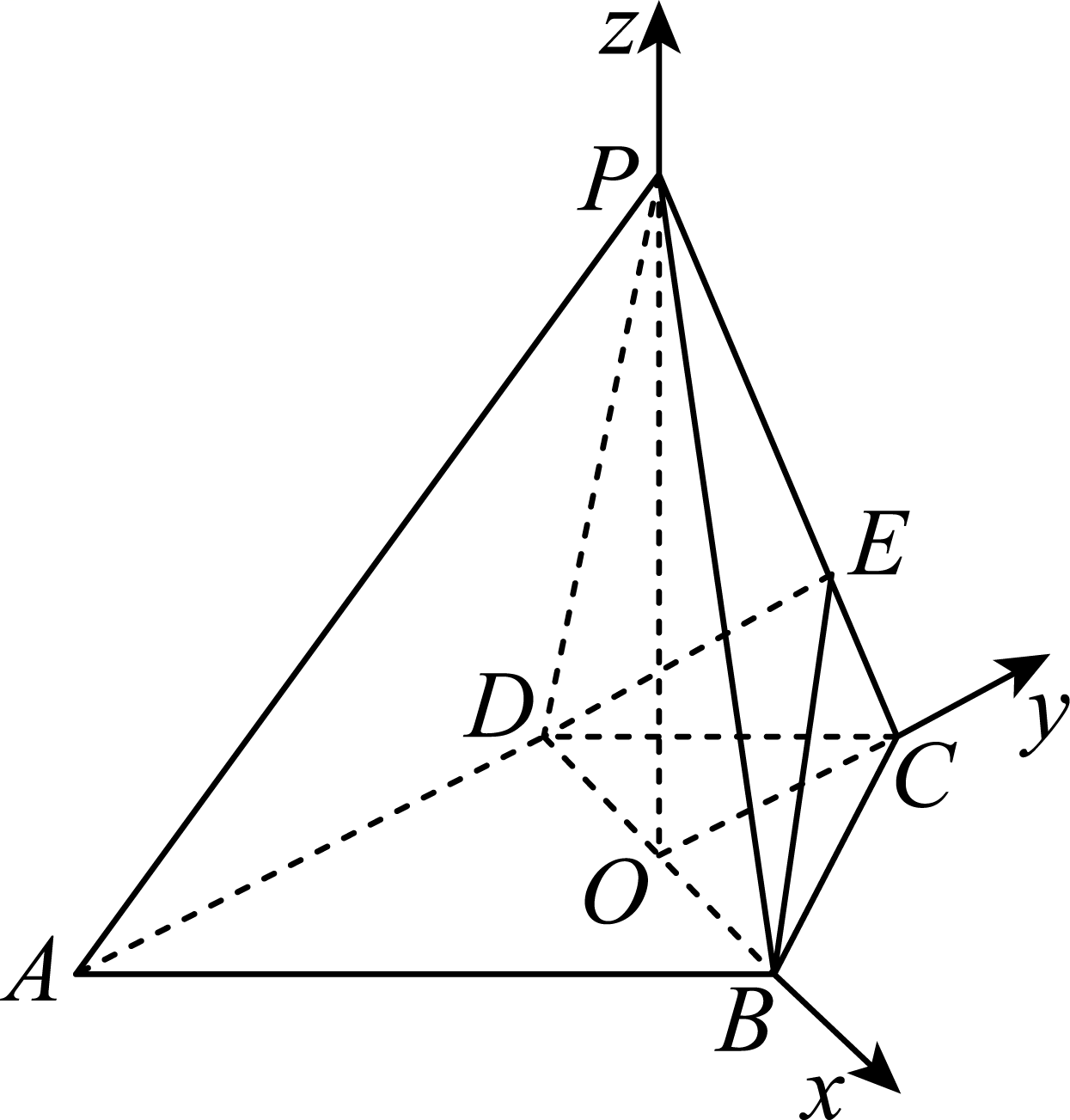
平面，

连接，则，且平面，

故，

所以*PO*，*BD*，*OC*两两垂直．

以*O*为原点，以为*x*轴正方向，以为*y*轴正方向，以为*z*轴正方向建立空间直角坐标系，



则，

设且，则，

由三棱锥的体积为得：，

所以，



，

设平面的一个法向量为，

则，令，则，故，

设平面的一个法向量为，

则，令，则，

故．

所以平面与平面的夹角余弦值为：

.

18. 已知抛物线的焦点为*F*，不过原点的直线*l*交抛物线*C*于*A*，*B*两不同点，交*x*轴的正半轴于点*D*．

（1）当为正三角形时，求点*A*的横坐标；

（2）若，直线，且和*C*相切于点*E*；

①证明：直线过定点，并求出定点坐标；

②的面积是否存在最小值？若存在，请求出最小值；若不存在，请说明理由．

【答案】（1）3 （2）证明见解析，定点为（1,0），最小值为16

【解析】

【分析】（1）根据抛物线*C*的方程，可以求得焦点坐标，由 是正三角形，设点*A*和*D*的坐标，可以求解；

（2）过点*A*，作准线的垂线，得垂足*P*，构造平行四边形，设*A*点的坐标，以*A*点的纵坐标为参变量，分别计算直线，*AE*，*AB*的方程 以及三角形*AEB*的面积即可.

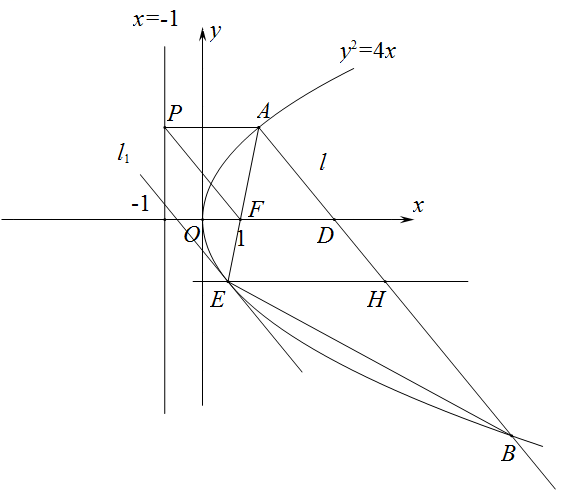
【小问1详解】

∵ ，∴抛物线焦点坐标*F*（1,0），准线方程为*x*=-1，

设*A*(*a*，*t*)，*D*(*m*，0)，因为 是正三角形，必有，解得 ，

即*A*点横坐标为3；

【小问2详解】



如图，设*A*点在第一象限，过*A*点作准线*x*=-1的垂线，得垂足*P*，连接*PF*， ， ，

∴四边形*APFD*是平行四边形， ，

设*A*(*a*，*t*) ，则*P*(-1，*t*)，直线*PF*的斜率为 ，

设 的方程为 ，联立方程，

消去*x*得： ，因为是抛物线*C*的切线， ，

 ， ， ，

即*E*点的坐标为 ，

直线*AE*的方程为： ，其中 ，

化简得：，故*AE*过定点*F*（1，0）；

直线*l*的方程为： ，化简得： ，

联立方程，消去*x*得 ，

 ， ，

即A，*B*两点的纵坐标之差的绝对值为 ，

过*E*点作*x*轴的平行线交*l*于*H*点，则 ，

 ，用铅垂高水平底的方法计算三角形*AEB*的面积，

  ，

当且仅当*t*=2时等号成立， 的最小值为16；

综上，*A*点的横坐标为3，直线*AE*过定点*F*（1,0），三角形*AEB*的面积最小值为16.

【点睛】本题的核心观察到四边形*APFD*是平行四边形，设点*A*的纵坐标为参数，这样计算会简便一些，计算三角形*AEB*的面积用初中的方法——水平底铅垂高比较方便，便于使用韦达定理.

19. 基本不等式可以推广到一般的情形：对于个正数，它们的算术平均不小于它们的几何平均，即，当且仅当时，等号成立．若无穷正项数列同时满足下列两个性质：①；②为单调数列，则称数列具有性质．

（1）若，求数列的最小项；

（2）若，记，判断数列是否具有性质，并说明理由；

（3）若，求证：数列具有性质．

【答案】（1）最小项为

（2）数列具有性质，理由见解析．

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用，结合三个数的算术平均不小于它们的几何平均求解；

（2）变形，再利用等比数列求和证明性质①，利用证明②；

（3）结合二项式定理及*n*元基本不等式求解.

【小问1详解】

，当且仅当，即时，等号成立，

数列的最小项为．

【小问2详解】

数列具有性质．

，

，

数列满足条件①．

单调递增数列，数列满足条件②．

综上，数列具有性质．

【小问3详解】

先证数列满足条件①：

．

当时，



则，

数列满足条件①．

再证数列满足条件②：



（，等号取不到）



为单调递增数列，数列满足条件②．

综上，数列具有性质.

【点睛】关键点点睛：本题考查等比数列求和及二项式定理，证明性质①均需要放缩为可求和数列.