**湖南2024年高三数学新改革提高**

**训练一**

**（九省联考题型）**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 小李同学参加了高三以来进行的6次数学测试，6次成绩依次为： 90分、100分、120分、115分、130分、125分.则这组成绩数据的上四分位数为（ ）

A. 120 B. 122.5 C. 125 D. 130

【答案】C

【解析】

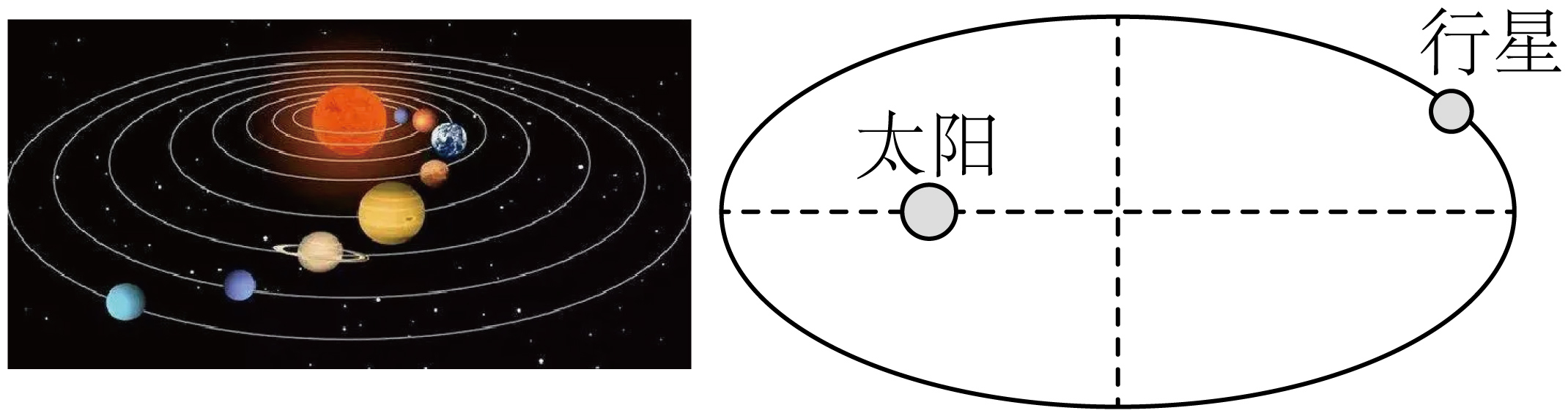
【分析】将6次成绩分数从小到大排列，根据百分位数的含义，即可求得答案.

【详解】将6次成绩分数从小到大排列依次为：，

由于，故这组成绩数据的上四分位数为第5个数125，

故选：C

2. 开普勒第一定律指出，所有行星绕太阳运动的轨道都是椭圆，太阳处在椭圆的一个焦点上.若某行星距太阳表面的最大距离为，最小距离，太阳半径为，则该行星运行轨迹椭圆的离心率为（ ）



A.  B. 

C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】设椭圆的焦距为，长轴长为，根据题意得到，计算可得离心率.

【详解】设椭圆的焦距为，长轴长为，

则由已知可得，

两式相加可得，两式相减可得，

则，，

所以离心率.

故选：A.

3. 若数列的前项和，则数列的前项和（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据求出，得到是首项为12，公差为12的等差数列，利用等差数列求和公式求出答案.

【详解】因为数列的前项和，

所以当时，，两式相减，得

，

当时，也符合该式，所以，

，

所以数列是首项为12，公差为12的等差数列，

所以.

故选：C．

4. 设，，表示平面，*l*表示直线，则下列说法中，错误的是（ ）.

A. 如果，那么内一定存在直线平行于

B. 如果，，，那么

C. 如果不垂直于，那么内一定不存在直线垂直于

D. 如果，，则

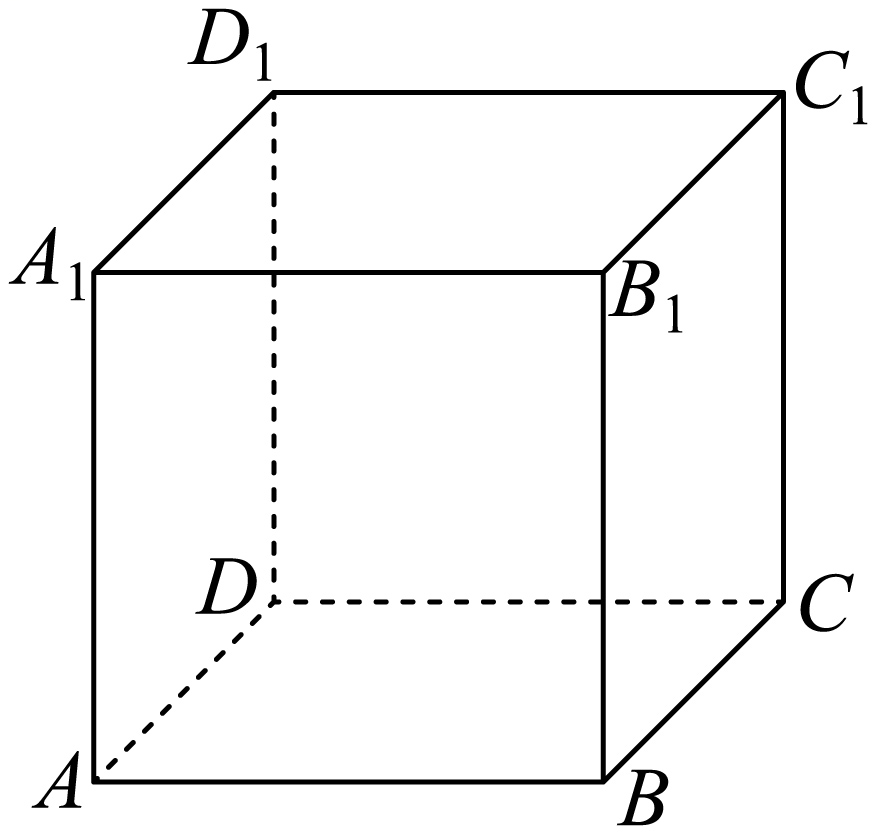
【答案】D

【解析】

【分析】根据题意结合空间中线面关系逐项分析判断.

【详解】对于选项A：根据线面关系可知：对于与的位置关系是平行或相交，在内均存在直线平行于，故A正确；

对于选项B：构造正方体（如图），取平面，为平面，为平面，



直线*l*即为直线，故B正确；

对于选项C：可用反证法假设，，与已知矛盾，故C正确；

对于选项D：如果，，与的位置关系为：平行或相交.

故选：D.

5. 口袋里有红黄蓝绿的小球各四个，这些球除了颜色之外完全相同，现在从口袋里任意取出四个小球，则不同的方法有（ ）种.

A. 48 B. 77 C. 35 D. 39

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意可将取出的球分为有一种、二种、三种、四种颜色分类，然后再求出各种情况有多少种，分类相加即可求解.

【详解】根据条件，取出的四个球可以分为一种，两种，三种，四种颜色，

当取出的球只有一种颜色时：有种；

当取出的球只有二种颜色时：有种；

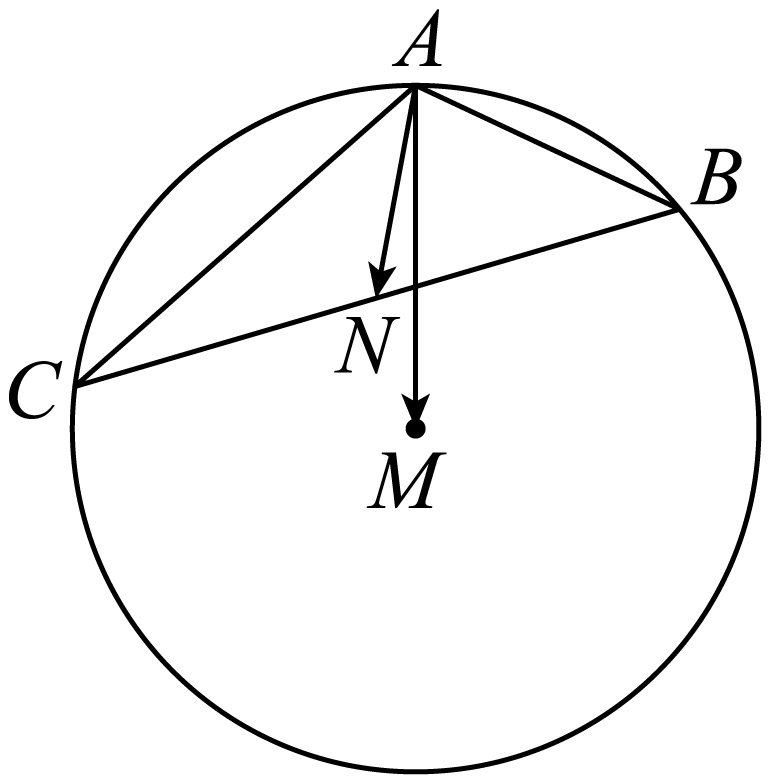
当取出的球只有三种颜色时：有种；

当取出的球只有四种颜色时：有种；

共有：种.故C项正确.

故选：C.

6. 如图，圆为的外接圆，，为边的中点，则（ ）



A. 10 B. 13 C. 18 D. 26

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形外接圆的性质，结合数量积的几何意义求解可得可得与，再根据平面向量的运算可得出结论．

【详解】是边的中点，可得，

是的外接圆的圆心，

，

同理可得，

．

故选：B．

7. 在中，角所对的边分别为，，若表示的面积，则的最大值为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】由条件利用正弦定理得的关系，由余弦定理可得，结合三角形面积公式求得的表达式，根据二次函数的性质可求得最大值，进而得解.

【详解】因为，

由正弦定理得，所以，

由余弦定理得，

所以，

令，则，当且仅当，即时取等号，

所以，

故选：D.

【点睛】关键点点睛：本题考查的知识并不算困难，但计算量较大，解决的关键是熟练掌握数学的计算，做到不出错即可得解.

8. 已知双曲线的右焦点为*F*，过点*F*且斜率为的直线*l*交双曲线于*A、B*两点，线段*AB*的中垂线交*x*轴于点*D*. 若，则双曲线的离心率取值范围是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意利用韦达定理求以及线段*AB*的中垂线的方程，进而可求点*D*和，结合运算求解即可.

【详解】设双曲线的右焦点为，则直线，

联立方程，消去*y*得：，

则可得，

则，

设线段的中点，则，

即，

且，线段的中垂线的斜率为，

则线段的中垂线所在直线方程为，

令，则，解得，

即，则，

由题意可得：，即，

整理得，则，

注意到双曲线的离心率，

∴双曲线的离心率取值范围是.

故选：A.

【点睛】方法定睛：双曲线离心率(离心率范围)的求法

求双曲线的离心率或离心率的范围，关键是根据已知条件确定*a*，*b*，*c*的等量关系或不等关系，然后把*b*用*a*，*c*代换，求的值（或范围）．

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．**

9. 若，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】BC

【解析】

【分析】复数的几何意义得出复数*z*所对应的点的轨迹，由共轭复数的定义及复数的运算可判断各选项.

【详解】利用复数的几何意义知在复平面内，对应的点在对应线段的中垂线即*y*轴上，

所以不一定是实数，所以A错误；

因为与关于实轴对称，且在*y*轴上，所以B，C正确；

取，则，所以D错误．

故选：BC.

10. 已知函数，则（ ）

A. 的一个周期为2 B. 的定义域是

C. 的图象关于点对称 D. 在区间上单调递增

【答案】ACD

【解析】

【分析】利用正切函数的图象与性质一一判定选项即可.

【详解】对于A，由可知其最小正周期，故A正确；

对于B，由可知，

故B错误；

对于C，由可知，

此时的图象关于点对称，故C正确；

对于D，由可知，

又在上递增，显然，故D正确.

故选：ACD

11. 定义在上的函数同时满足①；②当时，，则（ ）

A. 

B. 为偶函数

C. 存在，使得

D. 对任意

【答案】ACD

【解析】

【分析】对于A，根据题意令分析运算即可；对于B，根据题意求和，结合偶函数的定义分析判断；对于C，利用累加法分析判断；对于D，设，分析可知是以1为周期的周期函数，且，结合绝对值的性质分析求解.

【详解】对于A，，令，则，即，又，，即，

可知，即，得即，故A正确；

对于B，由选项A可得，又令得，解得，，

所以函数不是偶函数，故B错误；

对于C，因为，当时，





，又满足上式，

，，令，则，

所以存在，使得，故C正确；

对于D，令，

则

，即，即是以1为周期的周期函数，因为当，，

则，

当且仅当且与异号时等号成立，但，故与2同号，

故等号不成立，故

结合周期性可知对任意，均有，

所以，故D正确.

故选：ACD.

【点睛】关键点睛：对于选项D，构建函数，结合题中条件分析可知是以1为周期的周期函数，且，进而可得结论.

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．**

12. 已知集合，，若，则实数*m*的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】先利用基本不等式求得集合，再由得到，即可求得.

【详解】由集合中，当时，，当且仅当，即时等号成立，

故．因为，所以，所以，故实数*m*的取值范围为．

故答案为：.

13. 若正四面体的顶点都在一个表面积为的球面上，过点且与平行的平面分别与棱交于点，则空间四边形的四条边长之和的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】##

【解析】

【分析】根据条件求出正四面体的棱长为，设，利用几何关系得到空间四边形的四条边长之和，即可求出结果.

【详解】如图，将正四面体放置到正方体中，易知正四面体外接球即正方体的外接球，

设正四面体棱长为，所以正方体的边长为，

易知正方体的外接球直径为体对角线的长，又，所以正四面体的半径，

依题有，得到，即正四面体的棱长为，

因为面，面面，面，所以，

设

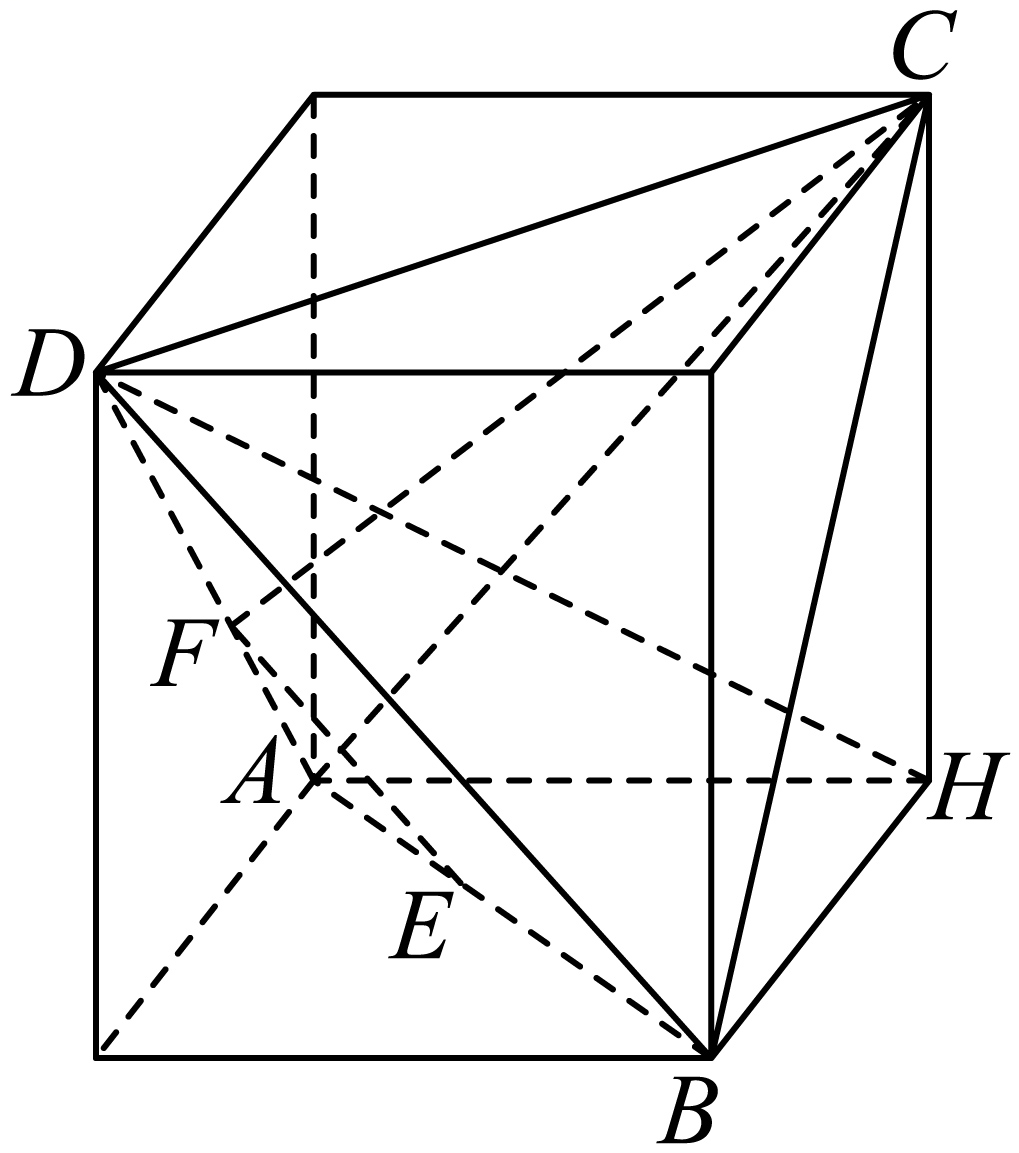
因为，则，，

在中，因为，所以，

在中，，，则，

所以空间四边形的四条边长之和，

又，当时，，



故答案为：.

【点睛】关键点点晴：本题的关键在于设出后，利用几何关系得出，，，从而得出空间四边形的四条边长之和，转化成求的最小值来解决问题.

14. 已知函数（），若不等式对恒成立，则实数*a*的取值范围为 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】不等式变形，令，，求导得到其单调性，结合特殊函数值，得到若，则或，即或，再对求导，得到其单调性和最值，得到，求出答案.

【详解】不等式对恒成立，

等价于，即，

所以,

设，其中，

则，令得，

所以当时，，单调递减，当时，，单调递增，

所以，又，，

所以存在使得，

所以若，则或，即或，

，，

所以在上，，单调递增，

在上，，单调递减，

所以，所以只有才能满足要求，

即，又，解得，

所以实数*a*的取值范围为．

故答案为：

【点睛】思路点睛：隐零点的处理思路：

第一步：用零点存在性定理判定导函数零点的存在性，其中难点是通过合理赋值，敏锐捕捉零点存在的区间，有时还需结合函数单调性明确零点的个数；

第二步：虚设零点并确定取范围，抓住零点方程实施代换，如指数与对数互换，超越函数与简单函数的替换，利用同构思想等解决，需要注意的是，代换可能不止一次.

**四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

15. 已知函数.

（1）讨论的单调性；

（2）已知时，直线为曲线的切线，求实数的值．

【答案】（1）答案见解析

（2）或

【解析】

【分析】（1）求导后因式分解，再讨论当，，时导函数的正负，即可判断原函数的单调性.

（2）求导后根据导数的几何意义设切点，求得切线方程，根据切线过原点计算即可求得结果.

【小问1详解】

．

令，得或．

若，则当时，；当时，．

故在上单调递增，在上单调递减；

若时，，在上单调递增；

若，则当时，；当时，．

故在上单调递增，在上单调递减．

综上所述：当时，在上单调递增，在上单调递减；

当时，在上单调递增；

时，在单调递增，在单调递减．

【小问2详解】

当时， 

设切点，则切线方程为

因为切线过原点， 故， 即，

解得或

所以或.

16. 某个足球俱乐部为了提高队员的进球水平，开展罚点球积分游戏，开始记0分，罚点球一次，罚进记2分，罚不进记1分．已知该俱乐部某队员罚点球一次罚进的概率为，罚不进的概率为，每次罚球相互独立．

（1）若该队员罚点球4次，记积分为，求的分布列与数学期望；

（2）记点球积分的概率为．

（ⅰ）求的值；

（ⅱ）求．

【答案】（1）分布列见解析，数学期望为；

（2）（i）；（ii）.

【解析】

【分析】（1）根据题意可取，分别求出相应的概率，列出分布列，求出期望.

（2）（ⅰ）根据题意可求出，（ⅱ）要得分，分先得分再点1个球不进，或者先得分再点1个球进球时的概率，因这两种情况互斥，从而可求出为等比数列，再利用累加法从而可求解.

【小问1详解】

由题意得，的所有可能取值为4，5，6，7，8，

，

，

的分布列为

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|  |  |  |  |  |  |

．

【小问2详解】

（ⅰ）由题意得，．

（ⅱ）由题意得，要得分，必须满足以下情形：先得分，再点1个球不进，此时概率为，

或先得分，再点1个球进球，此时概率为，

这两种情况互斥，，

是首项为，公比为的等比数列，

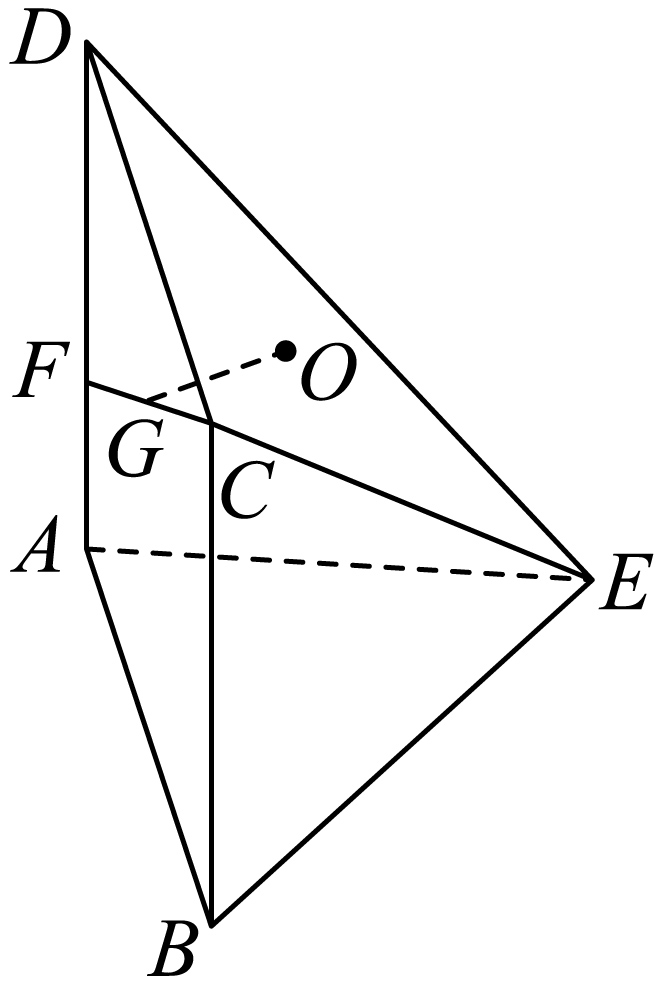
，



，

．

17. 如图，在四棱锥中，平面平面，，四边形为正方形，为等边三角形，点在上，，点为线段的中点，点*O*为三角形的重心．



（1）求证：平面；

（2）求直线与平面所成角的正弦值．

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）分别取线段的中点*H*，*P*，根据为的重心，证得，结合线面平行的判定定理，即可证得平面．

（2）以为坐标原点，建立空间直角坐标系*H*-*xyz*，设，求得平面的一个法向量和向量，结合向量的夹角公式，即可求解.

【小问1详解】

证明：分别取线段的中点*H*，*P*，连接，

由已知可得三点共线，三点共线．

因为，所以，

又因为为的重心，所以，

连接，则，

因为平面，平面，所以平面．

【小问2详解】

解：在等边中，因为为的中点，所以，

因为平面平面，平面平面，平面，

所以平面，

由（1）可得，所以两两垂直，

以为坐标原点，分别以所在直线为*x*，*y*，*z*轴建立空间直角坐标系*H*-*xyz*，

如图所示，

因为，，所以，

设，则，

所以，，，，

所以，，，

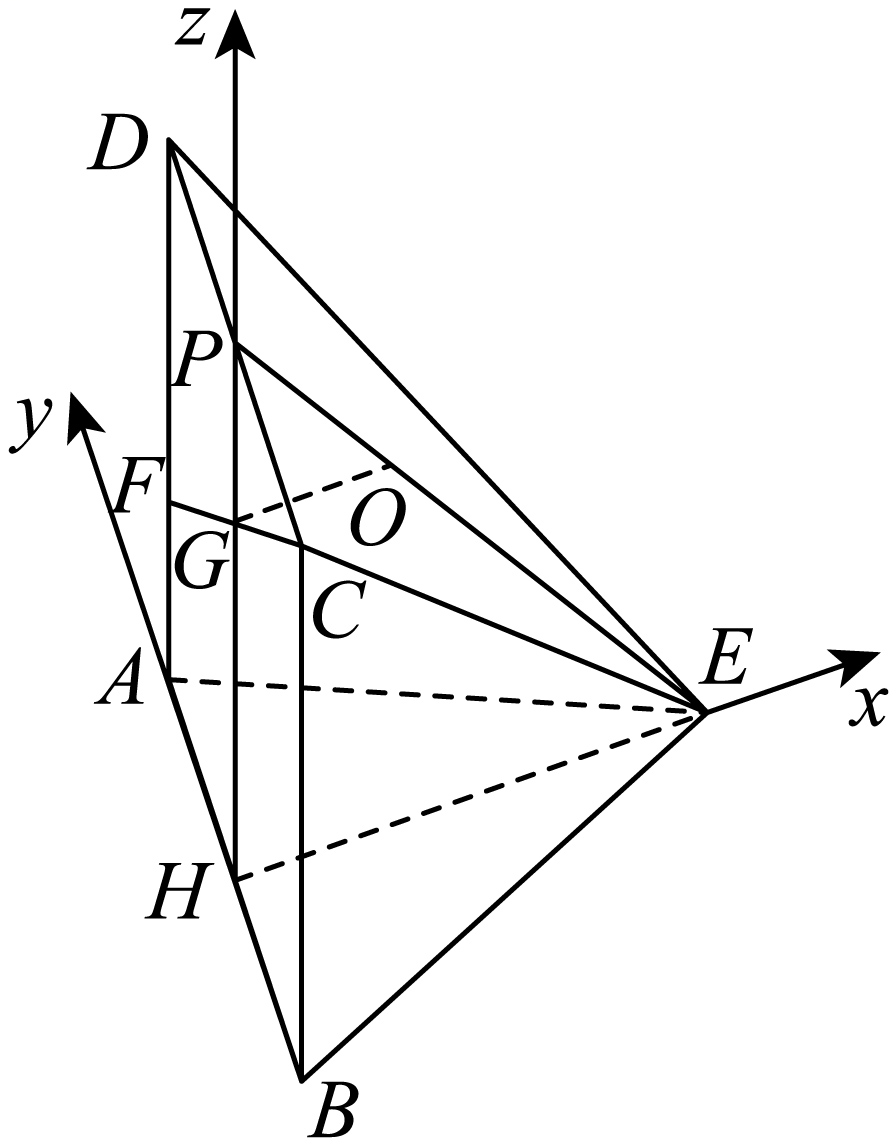
设平面的法向量为，则 ，

取，可得，所以，

设直线与平面所成的角为，

则，

所以直线与平面所成的角的正弦值为.



18. 已知圆的方程,,，抛物线过两点，且以圆的切线为准线.

（1）求抛物线焦点的轨迹*C*的方程；

（2）已知， 设*x*轴上一定点， 过*T*的直线交轨迹*C*于 两点（直线与轴不重合），求证：为定值.

【答案】（1）；

（2）证明见解析．

【解析】

【分析】（1）是圆的切线，分别过作直线的垂直，垂足分别为，由，利用椭圆定义可得轨迹方程；

（2）设直线的方程为，设，直线方程代入椭圆方程后应用韦达定理得，然后计算，代入化简可得．

【小问1详解】

如图，是圆切线，分别过作直线的垂直，垂足分别为，又是中点，则是直角梯形的中位线，，

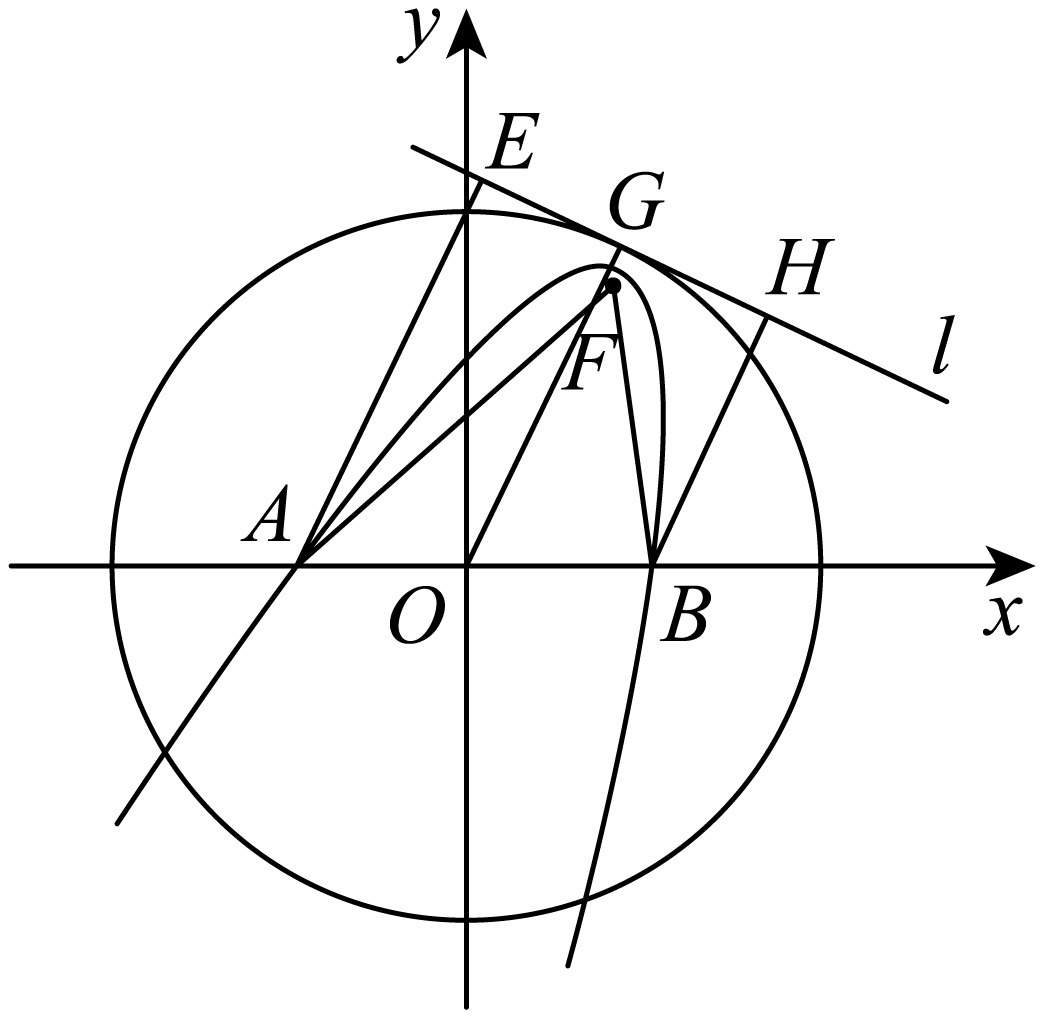
设是以为准线的抛物线的焦点，则，，

所以，

所以点轨迹是以为焦点的椭圆，椭圆长轴长为8，

，则，因此，

所以抛物线的焦点轨迹方程为；

 【小问2详解】

由题意设直线的方程为，设，

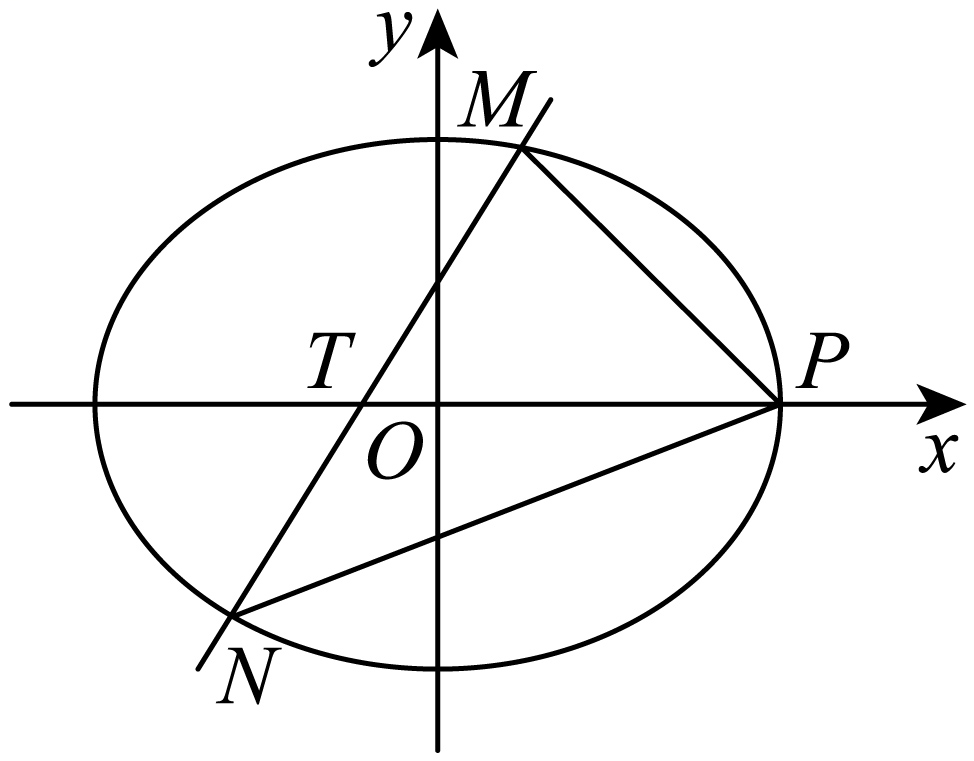
由得，

，，

，

代入，，得

为常数．

 【点睛】方法点睛：本题考查椭圆中定值问题，解题方法是设交点坐标．设直线方程，直线方程与椭圆方程联立方程组后消元应用韦达定理得（或），利用交点坐标计算出要证明常数的量，然后代入韦达定理的结果化简变形即可得．

19. 若无穷数列的各项均为整数．且对于，，都存在，使得，则称数列满足性质*P*．

（1）判断下列数列是否满足性质*P*，并说明理由．

①，，2，3，…；

②，，2，3，…．

（2）若数列满足性质*P*，且，求证：集合为无限集；

（3）若周期数列满足性质*P*，求数列的通项公式．

【答案】（1）数列不满足性质*P*；数列满足性质*P*，理由见解析

（2）证明见解析 （3）或．

【解析】

【分析】（1）根据题意分析判断；

（2）根据题意先证为数列中的项，再利用反证法证明集合为无限集；

（3）先根据题意证明，再分为常数列和非常数列两种情况，分析判断.

【小问1详解】

对①，取，对，则，

可得，

显然不存在，使得，

所以数列不满足性质*P*；

对②，对于，则，，

故

，因为，

则，且，

所以存在，，

使得，

故数列满足性质*P*；

【小问2详解】

若数列满足性质，且，则有：

取，均存在，使得，

取，均存在，使得，

取，均存在，使得，

故数列中存在，使得，即，

反证：假设为有限集，其元素由小到大依次为，

取，均存，使得，

取，均存在，使得，

取，均存在，使得，

即这与假设相矛盾，故集合为无限集.

【小问3详解】

设周期数列的周期为，则对，均有，

设周期数列的最大项为，最小项为，

即对，均有，

若数列满足性质：

反证：假设时，取，则，使得，

则，即，

这对，均有矛盾，假设不成立；则对，均有；

反证：假设时，取，则，使得，

这与对，均有矛盾，假设不成立，即对，均有；

综上所述：对，均有，

反证：假设1为数列中的项，由（2）可得：为数列中的项，

∵，即为数列中的项，

这与对，均有相矛盾，即对，均有，同理可证：，

∵，则，

当时，即数列为常数列时，设，故对，都存在，

使得，解得或，即或符合题意；

当时，即数列至少有两个不同项，则有：

①当为数列中的项，则，即为数列中的项，但，不成立；

②当为数列中的项，则，即为数列中的项，但，不成立；

③当为数列中的项，则，即为数列中的项，但，不成立；

综上所述：或.

【点睛】关键点点睛：（1）对于证明中出现直接证明不方便时，我们可以利用反证法证明；

（2）对于周期数列满足性质，证明思路：先逐步缩小精确的取值可能，再检验判断.