绝密★考试结束前

浙江省十校联盟2021年10月高三联考

数学试题卷

考生须知：

1. 本卷满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前务必将自己的姓名，准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的地方。
3. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范答题，在本试卷纸上答题一律无效。
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

参考公式：

如果事件 A,B 互斥那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

如果事件 A,B 相互独立,那么

$P(AB)=P(A)P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p ,那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\ldots,n)$

台体的体积公式

$V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$

其中 S_1,S_2 分别表示台体的上、下底面积，

h 表示为台体的高

柱体的体积公式

$V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

第Ⅰ卷（选择题，共40分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $M=\left\{x\middle|x^2-9\le 0\right\}$，$N=\{x|2x-4>0\}$，则 $M\cap N=$

A．$(-\infty,-3]$　　B．$[-3,+\infty)$　　C．$[-3,2)$　　D．$(2,3]$

2．已知复数 $(1+i)(a+i)$ 为纯虚数，其中 a 为实数，i 为虚数单位，则 $a=$

A．1　　B．-1　　C．2　　D．-2

3．若实数 x，y 满足不等式组 $\begin{cases}-x\le y\le x\\ x-1\le 0\end{cases}$，则 $z=x-2y$ 的最小值是

A．-1　　B．-2

C．-3　　D．0

4．已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的离心率为$e$，则“$e=\sqrt{2}$”是“曲线$C$为等轴双曲线”的

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

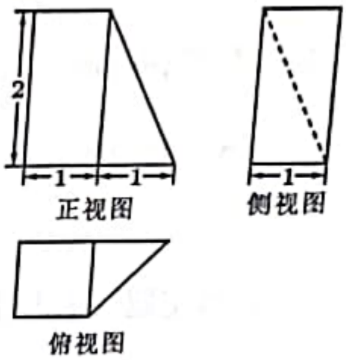
5．某几何体的三视图如右图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位：cm^3）是

A．$\frac{4}{3}$

B．$\frac{7}{3}$

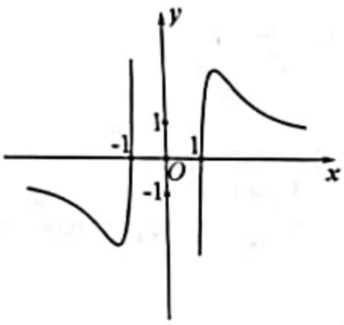
C．3

D．4

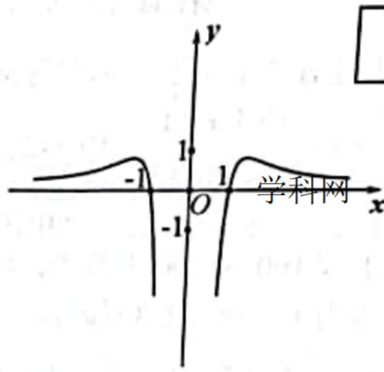


6．函数$f(x)=\frac{\ln|x|}{x-\sin x}$的部分图象大致为

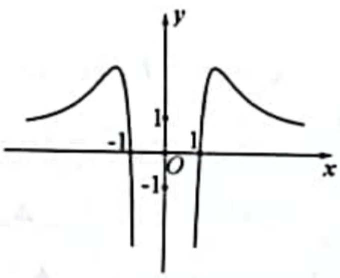
A.



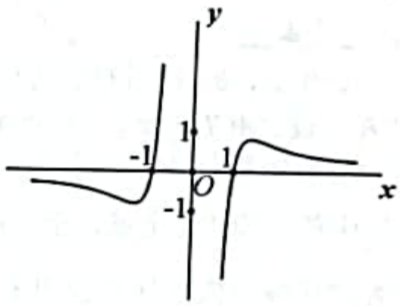
B.



C.



D.



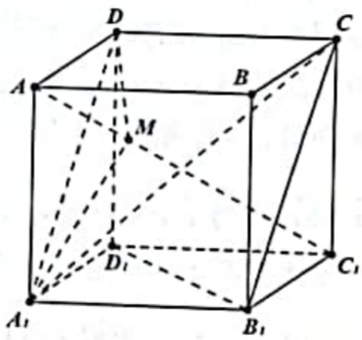
7．如图已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点M是对角线AC_1上的一点且$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC_1},\lambda\in(0,1)$，则

A．当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$AC_1\perp$平面A_1DM

B．当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$DM//$平面CB_1D_1

C．当ΔA_1DM为直角三角形时，$\lambda=\frac{1}{3}$

D．当ΔA_1DM的面积最小时，$\lambda=\frac{1}{3}$



8．已知方程$x^2+y^2=4+|y|\cdot x$表示曲线C，则下面结论中正确的是

A．曲线C关于直线$y=x$对称

B．曲线C的范围是$|y|\le 2$且$|x|\le 2$

C．曲线C上任意一点到原点的距离都不超过$2\sqrt{2}$

D．曲线C所围成区域的面积小于12

9．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x-1, x\ge e\\ ax+b-\ln x, 0<x<e\end{cases}$ 的最小值为0，e为自然对数的底数，则

A．$\forall a<0$，都有 $b<1-ae$

B．$\exists a<0$，使得 $b\le 1$

C．$\forall a\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$，都有 $b+\ln(ae)\ge 0$

D．$\exists a\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$，使得 $b<\ln(2-ae)$

10．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{4}{3}, a_{n+1}-1=a_n^2-a_n\left(n\in N^*\right)$，数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，则

A．$1<S_{2021}<2$

B．$2<S_{2021}<3$

C．$3<S_{2021}<4$

D．$4<S_{2021}<5$

第Ⅱ卷（非选择题，共 110 分）

二、填空题（本大题有 7 个小题，单空题每题 4 分，多空题每题 6 分，共 36 分）

11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x\le 1\\ \log_2 x, x>1\end{cases}$，则 $f(2)=$__▲__.

12．“中国剩余定理”又称“孙子定理”.“中国剩余定理”讲的是一个关于整除的问题，现有这样一个整除问题：将 1 到 100 这 100 个数中，能被 2 除余 1 且被 3 除余 1 的数按从小到大的顺序排成一列，构成首项为 1 的等差数列 $\{a_n\}$，则此数列的项数为__▲__.

13．已知多项式 $(x-2)^2\cdot(x+1)^3=x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$，则 $a_1=$__▲__，$a_2-a_3+a_4=$__▲__.

14．已知 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别是 a,b,c，已知 $a=2, b=1, C=90^\circ$，D 是边 AB 上一点，且 $AD=2DB$，设 $\angle ACD=\alpha$，则 $\tan\alpha=$__▲__，$CD=$__▲__.

15．一个袋中共有10个大小相同的黑球、白球和红球．已知从袋中任意摸出1个球，得到黑球的概率是 $\frac{2}{5}$；从袋中任意摸出 2 个球，至少得到 1 个白球的概率是 $\frac{7}{9}$，则白球的个数为__▲__，现采用有放回方式从袋中依次任意摸出3个球，记得到白球的个数为 ξ，则 $E(\xi)=$__▲__.

16．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ $(c>0)$，过右焦点 F_2 的直线 l 与圆 $x^2+y^2=b^2$ 相切于点 P，与椭圆相交于 A,B 两点，点 A 在 x 轴上方，且切点 P 恰为线段 AF_2 的中点，则椭圆的离心率为__▲__，直线 l 的斜率为__▲__.

17．已知空间向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两的夹角均为 60°，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=6$. 若向量 $\vec{x},\vec{y}$ 分别满足 $\vec{x}\cdot(\vec{x}+\vec{a}-\vec{b})=0$ 与 $\vec{y}\cdot\vec{c}-8=0$，则 $|\vec{x}-\vec{y}|$ 的最小值是__▲__.

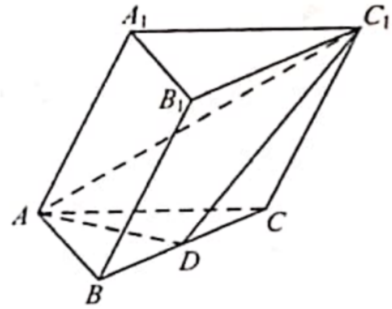
三、解答题（本大题有 5 个小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

18．（本题满分 14 分）已知函数 $f(x)=2\sin x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

（I）求 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 的值；

（II）已知 $m<\frac{\pi}{4}$，若对任意 $x\in\left[m,\frac{\pi}{4}\right]$，都有 $\left|f(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\le\frac{1}{2}$，求实数 m 的范围.

19．（本题满分 15 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=2$，D 为 BC 的中点，平面 $BB_1C_1C\perp$ 平面 ABC．



（I）证明：$AD\perp BB_1$；

（II）已知四边形 BB_1C_1C 是边长为 2 的菱形，且 $\angle B_1BC=60^0$，求直线 AA_1 与平面 AC_1D 所成角的正弦值．

20．（本题满分 15 分）已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和满足 $S_n>1$，且 $6S_n=(a_n+1)(a_n+2),n\in N^*$．

（I）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n(2^{b_n}-1)=1$，并记 T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求证：$T_n+1<\log_2(a_n+3),n\in N^*$．

21．（本题满分 15 分）已知动点 $P(x,y)$ 到点 $F(1,0)$ 与到直线 $x=-1$ 的距离相等．

（I）求点 P 的轨迹 L 的方程；

（II）设 $M(x_0,y_0)$ $(y_0\ge 0)$ 在曲线 L 上，过 M 作两条互相垂直的直线分别交曲线 L 异于 M 的两点 A,B，且 $|MA|=|MB|$，记直线 MA 的斜率为 $k(k>0)$．

（i）试用 k 的代数式表示 y_0；

（ii）求 ΔMAB 面积 S 的最小值．

22．（本题满分 15 分）已知 $a>0$ 且 $a\ne 1$，函数 $f(x)=x^a-a^x(x>0)$．

（I）当 $a=2$ 时，设 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$，求 $f'(x)$ 的单调区间；

（II）若函数 $y=f(x)$ 恰有两个互异的零点 $m,n(m>n>0)$．

（i）求实数 a 的取值范围；

（ii）求证：$mn>e^2$．

浙江省十校联盟 2021 年 10 月高三联考

数学参考答案

一、选择题：

1-5：D A A C B　　　　6-10：D D C C B

二、填空题

11．1；　　12．17；　　13．$-1,2$；　　14．$4,\dfrac{\sqrt{17}}{3}$；

15．$5,\dfrac{3}{2}$；　　16．$\dfrac{\sqrt{5}}{3};-2$；　　17．$\dfrac{1}{3}$；

18．解：

（1）$f(x)=2\sin x\cdot\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin x\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

……………………………………………………………………………………2 分

$=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

……………………………………………………………………………………6 分

所以 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

……………………………………………………………………………………8 分

（2）$x\in\left[m,\dfrac{\pi}{4}\right]$，$\left|f(x)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left|\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right|\le\dfrac{1}{2}$……………………………… 10 分

$\because 2x-\dfrac{\pi}{3}\in\left[2m-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right]$，$\therefore -\dfrac{\pi}{6}\le 2m-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore \dfrac{\pi}{12}\le m<\dfrac{\pi}{4}$，…………………………14 分

19．【解析】

（1）证明：因为 $AB=AC=2$，D 是 BC 的中点，

所以 $AD\perp BC$，……………………………………………………………1 分

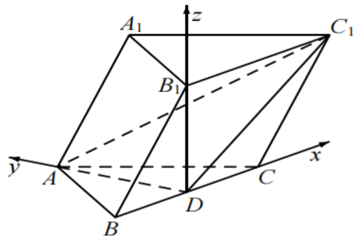
又因为平面 $BB_1C_1C\perp$ 平面 ABC，

且平面 $BB_1C_1C\cap$ 平面 $ABC=BC$，　$AD\subset$ 平面 ABC，

故 $AD\perp$ 平面 BB_1C_1C，…………………………………………………2 分

所以 $AD\perp BB_1$，……………………………………………………………4 分

（2）【解法一】



因为四边形 BB_1C_1C 为菱形，且 $\angle B_1BC=60^\circ$，连接 B_1D，

则 $B_1D\perp BC$，

又因为平面 $BB_1C_1C\perp$ 平面 ABC，平面 $BB_1C_1C\cap$ 平面 $ABC=BC$，

故 $B_1D\perp$ 平面 ABC ………………………6 分

以 D 为坐标原点，DC，DA，DB_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系.

则 $D(0,0,0)$，$C(1,0,0)$，$A(0,\sqrt{3},0)$，$C_1(2,0,\sqrt{3})$.

……………………………………………………………………………………8 分

所以 $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC_1}=(2,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DA}=(0,\sqrt{3},0)$，

……………………………………………………………………………………10 分

设平面 DAC_1 的法向量 $n=(x_1,y_1,z_1)$，

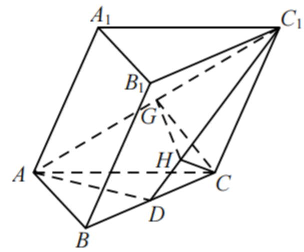
则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AC_1}=0\\ n\cdot\overrightarrow{DA}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x_1-\sqrt{3}y_1+\sqrt{3}z_1=0\\ \sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=\sqrt{3}$，则 $z_1=-2$，所以 $\vec{n}=(\sqrt{3},0,-2)$；……………………………12 分

所以 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AA_1},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{n}\right|}{|\overrightarrow{AA_1}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，……………………………14 分

直线 AA_1 与面 AC_1D 的所成角的正弦值 $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$ ……………………………………15 分

（2）【解法二】



因为 $AD\perp$ 平面 BB_1C_1C， $AD\subset$ 平面 ADC_1，

所以平面 $ADC_1\perp$ 平面 BB_1C_1C，

在平面 BB_1C_1C 内，过 C 作 $CH\perp DC_1$ 于点 H，

则 $CH\perp$ 平面 ADC_1.

……………………………………………………8 分

则 $\angle CC_1H$ 即为直线 AA_1 与面 AC_1D 的学科网所成角

……………………………………………………………………………………10 分

在直角 $\triangle DB_1C_1$ 中， $B_1C_1=2$，$B_1D=\sqrt{3}$，$DC_1=\sqrt{7}$；

在 $\triangle DCC_1$ 中， $CH=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$， ……………………………………………………12 分

在直角 $\triangle CC_1H$ 中， $CC_1=2$， 所以 $\sin\angle CC_1H=\dfrac{CH}{CC_1}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$， ……………14 分

直线 AA_1 与面 AC_1D 的所成角的正弦值 $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$ ……………………………………15 分

20．解：

（1）由 $a_1=S_1=\dfrac{1}{6}(a_1+1)(a_2+1)$，结合 $a_1=S_1>1$，因此 $a_1=2$

……………………………………………………………………………………2 分

由 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{6}(a_{n+1}+1)(a_{n+1}+2)-\dfrac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$

……………………………………………………………………………………4 分

得 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-3)=0$，又 $a_n>0$，得 $a_{n+1}-a_n=3$

……………………………………………………………………………………6 分

从而 $\{a_n\}$ 是首项为 2 公差为 3 的等差数列，故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-1$

……………………………………………………………………………………8 分

（2）由 $a_n(2^{b_n}-1)=1$ 可得 $b_n=\log_2\dfrac{3n}{3n-1}$，从而

……………………………………………………………………………………………… 10 分

$T_n=\log_2(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{3n}{3n-1})$

$\because \dfrac{3n}{3n-1}<\dfrac{3n+2}{3n-1}$

$\therefore \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{3n}{3n-1}<\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{8}{5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{3n+2}{3n-1}=\dfrac{3n+2}{2}$

……………………………………………………………………………………………… 12 分

于是 $T_n=\log_2(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{3n}{3n-1})$

$<\log_2\left(\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{8}{5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{3n+2}{3n-1}\right)=\log_2\dfrac{3n+2}{2}=\log_2(3n+2)-1$

$\therefore T_n+1<\log_2(3n+2)=\log_2(a_n+3)$

……………………………………………………………………………………………… 15 分

21．解：

（1）由题设可得动点 P 的轨迹方程为 $y^2=4x$.

……………………………………………………………………………………………… 4 分

（2）由（1），可设直线 MA 的方程为：$y=k\left(x-\dfrac{y_0^2}{4}\right)+y_0\,(k>0)$，

$$\begin{cases} y=k\left(x-\dfrac{y_0^2}{4}\right)+y_0\,(k>0) \\ y^2=4x \end{cases}\Rightarrow y=k\left(\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{y_0^2}{4}\right)+y_0\Rightarrow ky^2-4y-ky_0^2+4y_0=0$$

……………………………………………………………………………………………… 6 分

设 $A\left(\dfrac{y_1^2}{4},y_1\right)$ 易知 y_0,y_1 为该方程的两个根，故有 $y_0+y_1=\dfrac{4}{k}$ 得 $y_1=\dfrac{4}{k}-y_0$，

……………………………………………………………………………………………… 8 分

从而得 $|MA|=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{k}\right)^2}\cdot|y_1-y_0|=2\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{k}\right)^2}\left(\dfrac{2}{k}-y_0\right)$

……………………………………………………………………………………………… 10 分

类似地，可设直线 MB 的方程为：$y=\left(-\dfrac{1}{k}\right)\left(x-\dfrac{x_0^2}{4}\right)+y_0\,(k>0)$，

从而得 $|MB|=2\sqrt{1+k^2}\times(y_0+2k)$，

由 $||MA|=|MB|$，得 $\dfrac{1}{k^2}(2-ky_0)=y_0+2k$，

解得（i）$y_0=\dfrac{2(1-k^3)}{k^2+k}$.

……………………………………………………………………………………………… 12 分

（ii）$\because |MA|=|MB|=2\sqrt{1+k^2}\times(y_0+2k)=4\sqrt{1+k^2}\ \dfrac{1+k^2}{k(k+1)}\ (k>0)$.

$$\therefore |MA|=\frac{4\sqrt{1+k^2}\left(k^2+1\right)}{k(k+1)}\geq\frac{4\sqrt{\dfrac{(1+k)^2}{2}}}{k(k+1)}\cdot 2k=4\sqrt{2}$$

…………………………………………………………………………………………………… 14 分

$$\therefore S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}\left[\frac{4\sqrt{1+k^2}\left(k^2+1\right)}{k(k+1)}\right]^2\geq 16$$

即 S 的最小值为 16.

…………………………………………………………………………………………………… 15 分

22．解：

（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=x^2-2^x, f'(x)=2x-2^x\ln 2$，$f''(x)=2-(\ln 2)^2 2^x$

…………………………………………………………………………………………………… 2 分

令 $f''(x)=0\Rightarrow 2-(\ln 2)^2 2^x=0\Rightarrow 2^x=\dfrac{2}{(\ln 2)^2}\Rightarrow x=\log_2\dfrac{2}{(\ln 2)^2}$

$\because f''(x)=2-(\ln 2)^2 2^x$ 单调递减

…………………………………………………………………………………………………… 4 分

当 $x\geq\log_2\dfrac{2}{(\ln 2)^2}$ 时，$f''(x)\leq 0$，所以 $f'(x)$ 在 $\left[\log_2\dfrac{2}{(\ln 2)^2},+\infty\right)$ 单调递减

当 $0<x<\log_2\dfrac{2}{(\ln 2)^2}$ 时，$f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $\left(0,\log_2\dfrac{2}{(\ln 2)^2}\right)$ 单调递增

…………………………………………………………………………………………………… 6 分

（2）$f(x)=x^a-a^x=0\Leftrightarrow a^x=x^a\Leftrightarrow x\ln a=a\ln x\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln a}{a}$,

…………………………………………………………………………………………………… 8 分

设函数 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,

则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=e$,

在 $(0,e)$ 内 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增;

在 $(e,+\infty)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减;

…………………………………………………………………………………………………… 10 分

$\therefore g(x)_{max}=g(e)=\dfrac{1}{e}$,

又 $g(1)=0$，当 x 趋近于 $+\infty$ 时，$g(x)$ 趋近于 0,

函数 $y=f(x)$ 恰有两个互异的零点 $m,n(m>n>0)$ 充分必要条件是 $0<\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{1}{e}$,

这即是 $0<g(a)<g(e)$，所以 a 的取值范围是 $(1,e)\cup(e,+\infty)$.

……………………………………………………………………………………………… 12 分

（3）$\therefore \dfrac{\ln m}{m}=\dfrac{\ln n}{n}$，即 $g(m)=g(n)$

由(I)知 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减

且 $g(1)=0$，

则 $1<n<e<m$

要证 $mn>e^2$，即证 $m>\dfrac{e^2}{n}>e$，即证 $g(m)<g\left(\dfrac{e^2}{n}\right)$，即证 $g(n)<g\left(\dfrac{e^2}{n}\right)$

……………………………………………………………………………………………… 13 分

即证 $\dfrac{\ln n}{n}<\dfrac{n(2-\ln n)}{e^2}$

由于 $1<n<e$，即 $0<\ln n<1$，即证 $e^2\ln n<2n^2-n^2\ln n$

……………………………………………………………………………………………… 14 分

令 $G(x)=e^2\ln x-2x^2+x^2\ln x(1<x<e)$

则 $G'(x)=\dfrac{e^2}{x}-4x+2x\ln x+x=\left(\dfrac{e^2}{x}-x\right)+2x(\ln x-1)=\dfrac{(e+x)(e-x)}{x}+2x(\ln x-1)$

$G'(x)=x\left[\dfrac{e^2-x^2}{x^2}+2(\ln x-1)\right]$

$h(x)=\dfrac{e^2-x^2}{x^2}+2(\ln x-1)$

$\because 1<x<e$

$h'(x)=-\dfrac{2e^2}{x^3}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x^2-e^2)}{x^3}<0$

$\therefore h(x)>h(e)=0$，即 $G'(x)=xh(x)>0$

$\therefore G'(x)>0$ 恒成立　$\therefore G(x)$ 在 $(1,e)$ 递增

$\therefore G(x)<G(e)=0$ 在 $x\in(1,e)$ 恒成立

$\therefore mn>e^2$

……………………………………………………………………………………………… 15 分