# “引导教学”视角下一道高考题的剖析①

## ——以 2021 年高考数学北京卷第 9 题为例

李红云 伍春兰

（北京教育学院 100120）

高考评价体系明确了“立德树人、服务选才、引导教学”的核心功能，将考察内容确定为“核心价值、学科素养、关键能力、必备知识”[1]，如何以高考题“引导教学”，落实学科核心素养，值得探究．以 2021 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）数学（以下简称高考数学北京卷）第 9 题（表 1）为例，分享我们的研究．

**表 1 2021 年高考数学北京卷第 9 题**

| |
|---|
| 已知圆 $C$：$x^2+y^2=4$，直线 $l$：$y=kx+m$，当 $k$ 变化时，$l$ 截得圆 $C$ 的弦长的最小值为 2，则 $m=$（ ）． |
| A. $\pm 2$ B. $\pm\sqrt{2}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. $\pm\sqrt{5}$ |

## 1 学生调研

在北京某两校高二和高三各一个班，就第 9 题进行调查．学生独立解决并写出简要过程，选择典型作答的学生进行访谈．通过调研了解学生的解决思路及困难，主要有三种解决思路：运算求解、图形分析与运算求解、图形的直观想象．

### 1.1 运算求解

解析几何问题的通性通法，即联立圆和直线的方程，消元整理得到含参数 $k$ 和 $m$ 的关于 $x$ 的一元二次方程：

$$(k^2+1)x^2+2kmx+(m^2-4)=0. \quad ①$$

利用两点间的距离公式表示弦长，运算中借助韦达定理整理为关于 $k$ 和 $m$ 的表达式，根据题干条件“弦长的最小值为 2”，分析弦长表达式得到 $m$ 的值．

调研发现，选择该思路的学生，有的只列出联立方程，最多到写出方程①．学生的表现反映出其面对稍复杂解析几何问题的信心不足，另外也说明其数学运算的训练不够，特别是含参数运算的训练．针对只能想到运算求解且无法解决的学生，教师要关注学生数学运算的训练，另外要引导学生从几何图形进行分析．

### 1.2 图形分析与运算求解

几何图形分析基础上进行数学运算．该题目涉及弦长（$n$）、弦心距（$d$）和半径（$r$）的关系（图 1），由勾股定理得 $d^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2=r^2$．学生表现出两类做法，一是借助弦心距求弦长，二是将最小弦长为 2⇔最大弦心距为 3．

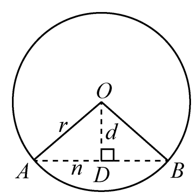


图 1

借助弦心距求弦长的学生比较多，其中有的是开始想到联立方程求解，但是觉得计算很麻烦，转而借助弦心距求弦长．利用点到直线的距离公式表示出弦心距

$$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}, \quad ②$$

进而表示出弦长

$$n=2\sqrt{4-\frac{m^2}{k^2+1}}. \quad ③$$

① 基金资助：北京教育学院 2020 年度重点关注科研课题“中考高考背景下信息技术与数学教学深度融合的实践研究”（项目编号：ZDGZ2020－10）阶段研究成果．

令 $2\sqrt{4-\frac{m^2}{k^2+1}}=2$，分析等式左边表达式，当 $k=0$ 时取到最小值 2，解得 $|m|=\sqrt{3}$. 等价转化最大弦心距为 3 的分析类似，不再赘述.

调研发现，选择该思路但没有解决的学生，遇到困难是没有读取 $m$ 为定值，表达式②或③中 $k$ 和 $m$ 都在变化，无法分析取得最大或最小值的条件；顺利解答的学生，有的没有考虑 $m$ 是否为定值，在分析弦长或弦心距的表达式时，如②式中，当 $k=0$ 时取得最小弦长 2，进而解得 $m=\pm\sqrt{3}$. 针对学生的问题，教师要引导学生对题目"暗示"条件的读取，另外也要关注学生数学严谨性"翻译"，如学生直接取弦长或弦心距的边界值，而不是翻译为：$n=2\sqrt{4-\frac{m^2}{k^2+1}}\geqslant 2$.

专家与新手解决问题的不同点在于，专家不是从目标往回走，而是扩展已有知识去解决问题，即想办法充分利用已有的条件[2]. 专家这种解决问题方式，对日常解题教学的启示是引导学生对题目的信息，包括"暗示"条件的有效读取、加工和转换. 当解题遇阻，尝试等价转换是重要策略. 波利亚怎样解题表的拟定计划中，多处提到转换问题，如"你能知道一道与它有关的题目吗？你能利用它吗？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？"特别地提到等价转换："你能以不同的方式叙述它吗？"第 9 题将不同数学对象转换，即将弦长问题等价转换为弦心距问题，从而简化数学运算.

### 1.3　图形的直观想象

几何图形直观想象截得最小弦长时，直线的位置及参数条件. 从题干和选择支的设置表明，满足条件的直线过点$(0,m)$，且是定点，由此当 $k$ 变化时，满足条件的直线是绕着点$(0,m)$旋转的直线的集合. 当直线与 $x$ 轴平行时，弦长取得最小或弦心距取最大，弦心距$=|m|$，因此 $m=\pm\sqrt{3}$. 选择直观想象图形变化的学生，遇到的困难如下：

(1)无法想象弦长或弦心距的变化

当 $k$ 变化时，学生能够想象出直线为过定点$(0,m)$的一直线族，并且能够顺利排除选项 A 和 D. 如果 $m=\pm 2$，过定点$(0,\pm 2)$的直线族截得圆 $C$ 的弦长最小值为 0，因为 $k=0$ 时，直线 $l$ 与圆相切(图 2)，可以排除选项 A.

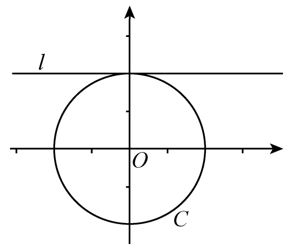


图 2

如果 $m=\pm\sqrt{5}$，定点$(0,\pm\sqrt{5})$在圆 $C$ 外部，因此直线族与圆 $C$ 有三种位置关系：相离、相切和相交(图 3)，可以排除选项 D.

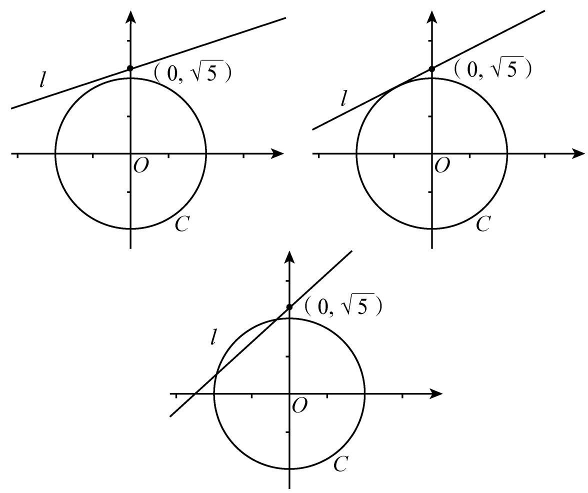


图 3

无法进一步确定 B 或 C，因为想象直线族截圆 $C$ 的变化有困难，截得弦长如何变化的？何时弦长取得最小值？弦心距如何变化？弦心距何时取得最大值？即单个参数 $k$ 变化，直观想象直线如何变化是容易的，直线变化所派生的圆 $C$ 中弦长或弦心距如何变化是有困难的.

(2)猜想特殊位置，无法说明理由

顺利读取 $m$ 为定值，有的学生猜想直线平行于 $x$ 轴时满足条件，计算求得 $m=\pm\sqrt{3}$，无法说明理由. 选择特殊情形进行尝试，是常见的策略，教师在教学中需要引导学生考虑周全，以及获得结论后进行合理性分析，结论是否满足题目条件等.

## 2 题目拓展

题目拓展的探究，需要跳出题目进行思考，题目有哪些条件？题目是否可以简化或变复杂？条件可以如何改变？条件改变后所考察侧重点是什么？等.

### 2.1 改变数值或表征

改变原题中数学对象的数值或表征，该角度改变并没有改变问题本质结构. 改变数值，需要注意的是数值的取值范围，第9题中最小弦长的范围是(0,4]，最小范围的获得可以从直观图或解析式两个角度分析获得. 改变数学对象的表征，如给出弦长为2的等价信息：直线 $l$ 与圆 $C$ 相交于 $A$、$B$ 两点，$\triangle OAB$ 为等边三角形；或者改为最大弦心距为 $\sqrt{3}$.

### 2.2 改变固定参数

由上述分析可知，$m$ 是定值这个隐藏条件，在题目解答中起着举足轻重的作用. 若 $m$ 不是定值，"弦长最小为2"简化为"弦长为定值2"，可否求得 $m$ 的取值范围？这个改变引起问题结构的变化.

首先构造弦长为2的直线：在圆 $C$ 上任意取一点 $A$ 作为直线 $l$ 与圆 $C$ 的一个交点；再以点 $A$ 为圆心，2为半径作圆 $C_1$，取 $C_1$ 与 $C$ 的一个交点 $B$，弦 $AB=2$(图4). 当点 $A$ 在圆 $C$(半径为2)上运动时，由于 $AB$ 弦长始终为2，故弦心距(为 $\sqrt{3}$)也保持不变，于是弦长为2的直线族的包络为小圆 $x^2+y^2=3$，通过信息技术动态演示也可观察轨迹特征(图5)，此时 $|m|\geqslant\sqrt{3}$.

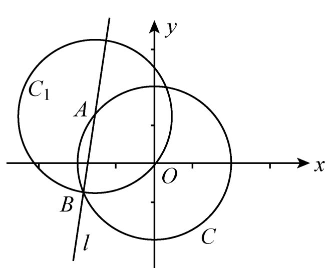


图 4

由 $n=2\Leftrightarrow d=\sqrt{3}$，即圆心 $O$ 到直线 $l$ 的距离为 $\sqrt{3}$，可看作圆心到弦 $AB$ 中点的距离为 $\sqrt{3}$，当 $k$ 变化时，垂线段 $OD$ 随着直线位置而变化，但 $OD=\sqrt{3}$ 恒成立，即 $D$ 点在以 $O$ 为圆心，以 $\sqrt{3}$ 为半径

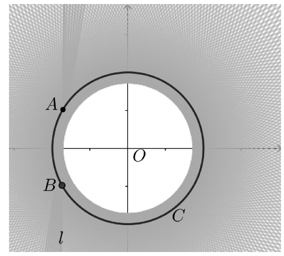


图 5

的圆上(图6). 即弦长为2时，直线一定过圆 $x^2+y^2=3$ 上某个点.

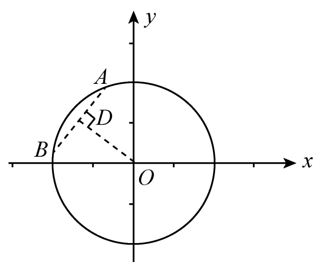


图 6

由式②或③整理都可得

$$|m|=\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}. \quad ④$$

④式中，当 $k$ 变化时，$k^2\geqslant 0$ 恒成立，因此 $|m|\geqslant\sqrt{3}$. 即当弦长为2时，$|m|\geqslant\sqrt{3}$.
因此，当弦长 $n$ 为2时，直线 $l$ 一定过圆 $x^2+y^2=3$ 上某个点，且 $|m|\geqslant\sqrt{3}$.

### 2.3 突破固定参数

将2.2中的"弦长为定值2"恢复到原题条件"弦长最小为2".

依据2.2的探究，直线 $l: y=kx+m$ 过小圆 $x^2+y^2=3$ 上某点 $D$. 过点 $D$ 的直线 $l$ 与圆 $C$ 相交的弦长范围为[2,4]，其中与小圆 $x^2+y^2=3$ 相切时，弦长最小为2. 当 $k$ 变化且与小圆不相切时，此时容易观察或想象直线 $l$ 与 $y$ 轴可以相交在任意位置，即 $m$ 可取任意值(图7).

如果截得最小弦长为2，或最大弦心距为 $\sqrt{3}$，由②或③整理可得

$$|m|\leqslant\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}. \quad ⑤$$

⑤式中，$k$ 可以取到任意值，因此 $m$ 可以取任意值.
因此，当弦长 $n$ 最小值为2时，直线 $l$ 一定过圆 $x^2+y^2=3$ 上某个点，$m$ 可以取到任意值.

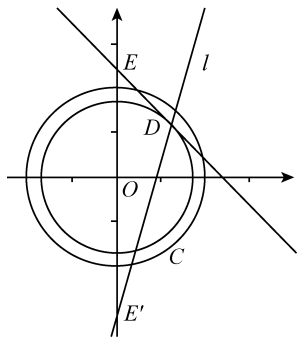


图 7

## 3　小结

### 3.1　学生研究

教师做学生研究，不仅仅是学生解题的表现，更为重要的是了解思维过程，正确解答学生的解题思路过程，错误解答的原因．如此才能找到帮助学生解决问题的对策．

调研发现，学生解决过程中遇到障碍，很大一部分原因是对题目条件的无效读取．包括无法读取重要信息，错误读取信息等，如学生将弦长和弦心距混淆，利用点到直线的距离 $d$，并将这个距离与最小弦长 2 建立联系，令 $d=2$；有学生将圆的方程当作椭圆或双曲线处理，将其变形为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$，并写出 $a^2=4$，$b^2=4$，$c^2=0$．

与两个班级的执教教师交流过这个题目，都提到解决这个问题的思路主要是数形结合，调研发现学生表现与教师预期是有差异的，很多学生选择了通过运算方式解决，并且尝试联立方程表示弦长的学生都没有做出来．那么学生选择运算方式的原因是什么？没有做完的原因是运算能力问题，信心问题，还是时间不够？等，都是值得研究的．

### 3.2　解题回顾

解题是数学活动的基本形式和主要内容，解题在数学学习和教学中占比颇高，具有不可替代的作用．[4]波利亚在《怎样解题》中提出四步解题法：理解题目；拟定方案；执行方案；回顾．[5]解题后的回顾也是教学中容易忽略的环节．解题回顾，包括解决问题的经验是什么？是否充分理解题目条件？条件之间的关系？能否进行转化等？有没有其他解决思路？解决过程中遇到的困难？通过这个题目反映出自身数学知识和思考的哪些不足？等等．

调研中发现，通过运算解决问题的学生，并没有思考图形是什么样的，或者无法想象图形；通过直观图形解决的学生，有猜测对的，也有猜测错的，但是都没有再回到问题中反思结论是否正确．对于运算思路，要引导如何通过形的分析简化运算，从形的角度思考 $k=0$ 在图形角度是什么？为什么这个位置弦长取得最小值？对于通过直觉猜想的学生，教学中要引导学生反思的意识，分析得到结论的合理性等．

### 3.3　题目研究

数学题目的研究，也是数学教师必备的基本功之一．教师对题目进行探究，经历发现、提出、分析和解决问题的完整过程，也有利于培养学生发现问题、提出问题的能力．

通过对第 9 题的剖析，得到弦长 $n$、斜率 $k$ 及截距 $m$ 三个参数之间的依赖关系．将其中的一个参数固定，可以使其成为高中生可求解的封闭题目，正如第 9 题利用选项支让 $m$ 成为了定值．

题目拓展研究中，经历了小改动、中变化、更大拓展的过程．小改动是对原题条件数值或数学对象表征进行改变，有利于学生建立数学对象的联系，发展数学思维的灵活性．中变化是改变固定参数，参数 $k$ 和 $m$ 都是变化的，将“弦长最小值为 2”退化为临界条件“弦长为 2”，通过借助信息技术的动态变化，得到问题的解决思路．更大拓展则是三个参数都在变化，此时信息技术起到了支持数学思考的作用．

### 3.4　技术融入

调研发现学生对复杂图形的直观想象能力较弱．教学中可以借助信息技术的优势，帮助学生建立动态变化的直观表象，这是信息技术最基本的应用．当涉及多个参数变化不容易直观想象出图形的变化时，借助信息技术的探究成为了“雪中送炭”．教师通过信息技术的呈现，也可以激发学生兴趣，体验图形动态变化所带来的魅力，积累动态直观想象的经验，从而达到不畏惧动态变化的问题．

师生借由信息技术分析、解决问题，继而发现、提出、分析和解决新问题，是教师专业成长和学生思维发展的一条可行路径．（下转第 56 页）

**评注** 当函数满足 $f(x+T)=Af(x)(T,A\neq 0)$、$f(kx)=Af(x)(k,A\neq 0)$等恒等式时，该函数将呈现类周期性.

## 3 命题警示

因为函数的周期性与其对称性等性质既相互关联，又相互制约，所以命题时一不小心就会出现多余的或自相矛盾的条件，从而犯科学性错误.

**案例 8** (2005 年某省高考试题)已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的奇函数，且 $f(2)=0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,6)$内解的个数的最小值是(　　).

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

**剖析** 由 $f(2)=0$ 及 $T=3$，可得 $f(5)=0$；由奇函数得 $f(0)=0$，进而 $f(3)=0$；由 $f(2)=0$ 及奇函数，得 $f(-2)=0$，进而 $f(1)=f(4)=0$；由奇函数得 $f(-\frac{3}{2})=-f(\frac{3}{2})$，再由 $T=3$ 得 $f(-\frac{3}{2})=f(\frac{3}{2})$，故 $f(\frac{3}{2})=0$，进而 $f(\frac{9}{2})=0$. 所以方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,6)$内解的个数的最小值为 7，从而该题无正确的选项.

估计命题时忽略了这样的一个隐含的事实：若 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 $T(T\neq 0)$为周期的奇函数，则必有 $f(\frac{T}{2})=0$.

**案例 9** (2010 年某地联考试题)定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$关于点$(-\frac{3}{4},0)$对称，$f(x)=-f(x+\frac{3}{4})$，且 $f(-1)=1$，$f(0)=-2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2010)=$________.

**剖析** 所给条件 $f(x)=-f(x+\frac{3}{4})$表明函数 $f(x)$是以$\frac{3}{2}$为周期的周期函数，结合已知对称中心$(-\frac{3}{4},0)$，可得原点$(0,0)$也是它的对称中心，故有 $f(0)=0$. 所以“$f(0)=-2$”这个条件不仅多余，还与可推出的结论相悖，是一道错题.

**案例 10** (2017 年某校试题)定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $f(x)$是奇函数，满足 $f(x+1)=\frac{1}{f(x)}$，当 $x\in(0,1)$时，$f(x)=2^x-2$，则 $f(\log_{\frac{1}{2}}6)$的值为________.

**剖析** 条件 $f(x+1)=\frac{1}{f(x)}$隐含函数 $f(x)$是以 2 为周期的周期函数，这是本题的命题意图之一. 但若取 $x=-\frac{1}{2}$，可得 $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{f(\frac{1}{2})}$ ①；再根据 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，得 $f(-\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2})$　②，①×②得 $f^2(-\frac{1}{2})=-1$，矛盾.

所以，本题中“得到周期性的恒等式 $f(x+1)=\frac{1}{f(x)}$”与“奇函数”这两个条件是矛盾的!

(上接第 38 页)

教学活动，逐一将其间隐藏的思想、方法、情感和精神显性化和结构化. 在明确学生已有的知识储备和能力基础的前提下，让学生经历贴合自己认知的知识发生过程，引导学生思考几何图形(数学知识)间的本质关联，逐渐形成合乎学生需求的方法和策略，积累学习经验的厚度和高度，感受源于数学思考得到的思想升华，才能够因势而谋、应势而动、顺势而为，在师生之间形成教学认同，逐渐实现把知识转化为能力，把能力转化为品格.

(上接第 51 页)

**参考文献**

[1]教育部考试中心. 中国高考评价体系(2019 年版)[M]. 北京：人民教育出版社，2019：6

[2] [美]赫伯特·西蒙. 认知人行为背后的思维与智能[M]. 荆其诚，张厚粲，等，译. 北京：中国人民大学出版社，2020：186

[3] 鲍建生，周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海：上海教育出版社，2009：198

[4] 罗增儒，罗新兵. 作为数学教育任务的数学解题[J]. 数学教育学报，2005(01)：12－15

[5] [美]G·波利亚. 怎样解题：数学思维的新方法[M]. 涂泓，冯承天，译. 上海：上海科技教育出版社，2007：4