基于问题驱动的高中数学探究性教学
——以双曲线拓展教学为例

陆 恬[1] 沈新权[2]

(1.浙江省桐乡茅盾高级中学 314500;2.浙江省嘉兴市第一中学 314050)

1 引言

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》指出:"高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向,创设合适的教学情境,启发学生思考,引导学生把握数学内容的本质.提倡独立思考、自主学习、合作交流等多种学习方式,激发学习数学的兴趣,养成良好的学习习惯,促进学生实践能力和创新意识的发展."[1]同时国务院办公厅印发的《关于新时代推进普通高中育人方式改革的指导意见》一文在创新教学组织管理中提出:"积极探索基于情境、问题导向的互动式、启发式、探究式、体验式等课堂教学,注重加强课题研究、项目设计、研究性学习等跨学科综合性教学,认真开展验证性实验和探究性实验教学"[2].这给我们高中数学教师提供了新的教学思路:"高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向,创设合适的教学情境,启发学生思考,引导学生把握数学内容的本质."[1]

2 案例呈现

2.1 问题提出

在学生的学习过程中,随着知识的不断深入与完善,不免会遇到学习上的困惑.比如在解析几何中,我们学习了双曲线之后,善于思考的学生就会产生困惑,初中阶段学的反比例函数也叫双曲线,那么高中阶段的双曲线与初中阶段的双曲线是不是同一种类型的曲线呢?还有没有其它的双曲线方程形式呢?

对于学生的这种疑问,我们要抓住契机,在课堂上,利用学生的困惑进行探索,最终启发学生通过解析几何中的双曲线的定义来判断初高中所讲的双曲线是不是同一种类型的曲线.

2.2 探究反比例函数、一次分式型函数与双曲线的关系

拓展 1 如何判断反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象是不是双曲线

探索:引导学生从双曲线的定义出发,寻找两个定点,使得反比例函数图象上的任意一点到这两个定点的距离之差的绝对值为定值(且定值小于这两个定点间的距离).

教师:为了方便,我们先从最简单的反比例函数 $C:y=\frac{1}{x}$ 开始.

设 $M(x,y)$ 是 C 上的任意一点,我们去寻找两个定点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,使得 $||MP|-|MQ||$ 为定值.

如何寻找 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$?从哪里开始入手?我们学过的双曲线的定义和几何性质能不能给我们提供一些启发?

学生:对于双曲线的标准方程来讲,这两个定点是在双曲线的对称轴上的.

教师:那么曲线 C 有没有对称轴呢?

学生:有的,曲线 C 的对称轴就是直线 $y=x$,这样我们需要寻找的点的坐标可以简单的设为 $P(m,m)$,$Q(n,n)$,而且由双曲线的几何性质我们知道这两个定点是关于原点对称的,因此,进一步可以把所寻找的定点的坐标设为 $P(m,m)$,$Q(-m,-m)$,从而 $||MP|-|MQ||=$
$$\left|\sqrt{(x-m)^2+\left(\frac{1}{x}-m\right)^2}-\sqrt{(x+m)^2+\left(\frac{1}{x}+m\right)^2}\right|.$$

教师:为了考查 $||MP|-|MQ||$ 能否为常数,我们从哪里入手?

学生：我们可以从代数式$\sqrt{(x-m)^2+\left(\frac{1}{x}-m\right)^2}$的运算入手，先来探求：当 m 为何值时，代数式$(x-m)^2+\left(\frac{1}{x}-m\right)^2$ 可以写成某个代数式的平方.

因为$\sqrt{(x-m)^2+\left(\frac{1}{x}-m\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2m\left(x+\frac{1}{x}\right)+2m^2}$，所以，我们首先把 $x+\frac{1}{x}$看成一个整体，即设 $x+\frac{1}{x}=t(t\leqslant-2$ 或 $t\geqslant2)$，则 $(x-m)^2+\left(\frac{1}{x}-m\right)^2=t^2-2mt+2m^2-2=(t-m)^2+m^2-2$，所以当 $m^2=2$，即 $m=\pm\sqrt{2}$ 时，$(x-m)^2+\left(\frac{1}{x}-m\right)^2=(t\pm\sqrt{2})^2$，所以当点 $M(x,y)$是曲线 C 上的第一象限上的点时（此时 $t\geqslant2$），$||MP|-|MQ||=\left|\sqrt{(t-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(t+\sqrt{2})^2}\right|=2\sqrt{2}$为常数；

同理当点 $M(x,y)$是曲线 C 上的第三象限上的点时（此时 $t\leqslant-2$），也有 $||MP|-|MQ||=2\sqrt{2}$为常数，而且这个常数小于$|PQ|=4$.

教师：至此，通过我们的探索，我们回答了曲线 $C:y=\frac{1}{x}$的图象确实是双曲线.

那么对于一般的反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0$ 且 k 为常数)，其图象是不是双曲线呢？

有了前面的思路，学生马上能够发现，对于一般的反比例函数，同样存在两个定点$(\sqrt{2}k,\sqrt{2}k)$与$(-\sqrt{2}k,-\sqrt{2}k)$，使得其图象上的任意一点到这两个定点的距离之差的绝对值为常数 $2\sqrt{2}|k|$（小于两个定点的距离 $4|k|$).

到这里，学生先前的疑问得以解决，不少学生的思维可能就到此为止了，但实际上要引导学生进一步探究，这仅仅是开始. 接下来，我们继续创设情境，联系旧知，引发猜想，进一步提出问题，为学生进行探究学习与活动创造条件.

拓展 2　探讨坐标轴旋转公式

通过上面的探索，我们知道了反比例函数$y=\frac{k}{x}(k\neq0$ 且 k 为常数)的图象也是双曲线，那么你有没有这样的疑惑：既然它也是双曲线，为什么它的方程与双曲线的标准方程有那么大的差异？

学生：就像物理中观察物体时所用的参照系一样，它们方程之间的差异在于坐标系的不同. 如果适当的改变坐标系，我觉得它们的方程应该可以是一样的.

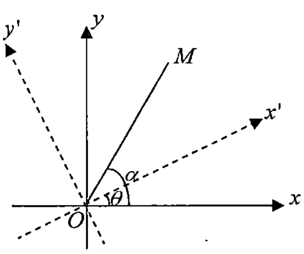
教师：对，很好！这样的思考，跨度就比较大了，它涉及到坐标轴旋转的概念. 坐标轴旋转对我们来讲是新的概念，但这一步不是不可跨越. 就像这位学生说的，坐标轴旋转的本质就是参照系的变化引起点的坐标的变化，从而引起曲线方程的变化.

说明：这个环节，如果没有教师的引导，学生就很难进行下去，所以，教师可以进一步启发.

教师：不改变坐标的位置和单位长度，只改变坐标轴方向的坐标系的变换，叫做坐标轴的旋转，我们首先需要解决的问题是把坐标轴绕着原点 O 旋转一定的角度后，直角坐标系中的点是如何变化的？

设点 M 在原坐标 xOy 中的坐标为(x,y)，坐标轴逆时针旋转 θ 角以后，坐标系变成 $x'Oy'$，设点 M 在新的坐标系 $x'Oy'$下的坐标为(x',y').. 现在的问题是，我们如何去寻找 x',y'与 x,y 之间的关系？

此时，教师可以适度启发：点 M 到原点的距离不变，坐标轴的旋转，变化的是角度，因此，我们的切入点在哪里？



学生：设$|OM|=r$，则由三角函数的定义有$\begin{cases}x=r\cos\alpha\\y=r\sin\alpha\end{cases}$. 将坐标轴绕坐标原点，按照逆时针方向旋转角 θ 形成新坐标系 $x'Oy'$，点 M 在新坐标系 $x'Oy'$中的坐标为(x',y')满足：

$$\begin{cases}x'=r\cos(\alpha-\theta)=r(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)\\y'=r\sin(\alpha-\theta)=r(\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta)\end{cases},$$

即$\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta\\ y'=y\cos\theta-x\sin\theta\end{cases}$.

教师:同样,我们也可以理解成新坐标系 $x'Oy'$ 绕顺时针旋转 θ(逆时针旋转 $-\theta$)变成原坐标系 xOy,则$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y=y'\cos\theta+x'\sin\theta\end{cases}$.[4]

通过坐标轴的旋转我们得到了平面直角坐标系下的旋转公式,下面我们就利用这个旋转公式来探讨一次分式型函数与双曲线的关系.

拓展 3 探讨双曲线标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 与一次分式型函数 $y=\frac{mx+n}{px+q}$ 的关系

教师:我们知道一次分式型函数是由反比例函数 $y=\frac{k}{x}$($k\neq0$ 且 k 为常数)平移变换得到的,前面我们从定义出发证明了反比例函数是双曲线,现在我们再从坐标旋转变换的角度来讨论它们方程之间的关系.

对于反比例函数而言,它的对称轴所在的直线方程是 $y=\pm x$,而双曲线标准方程中,其对称轴所在的直线方程是 x,y 轴,如果我们把 x,y 轴旋转到与 $y=\pm x$ 重合,会发生什么情况呢?

学生:把坐标系 xOy 绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到新坐标系 $x'Oy'$,此时 $y=\frac{k}{x}$ 上的点 $P(x,y)$ 变为 $P'(x',y')$,我们有$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}y'-\frac{\sqrt{2}}{2}x'\end{cases}$,

代入 $y=\frac{k}{x}$,可得

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)=k,$$

化简可得 $x'^2-y'^2=2k$.

教师:由此可见,经过坐标轴旋转以后反比例函数的解析式与等轴双曲线的标准方程在形式上是一致的.

拓展结论:一次分式型函数 $y=\frac{mx+n}{px+q}$($p\neq0$)的图象是等轴双曲线.

2.3 探究对勾函数与双曲线的关系

拓展 4 对于对勾函数 $y=mx+\frac{n}{x}$($mn\neq0$),我们知道它有两条渐近线,这一点与双曲线类似,那么对勾函数的图象是不是也是双曲线呢

我们可以先从如下的问题作为探究起点.

问题:点 P 到两定点 $A(1,2)$ 与 $B(-1,-2)$ 的距离差的绝对值等于 4,求点 P 的轨迹方程.

学生:设 $P(x,y)$,则 $\left|\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\right|=4$,化简可得:$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{x}$.

教师:你有没有发现上面问题中的曲线也符合双曲线的定义,而 $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{x}$ 实际上就是我们非常熟悉的对勾函数,由此我们可以得到什么结论?

学生:我们是否可以推测代数中的对勾函数 $y=mx+\frac{n}{x}$($mn\neq0$)的图象也是双曲线?

教师:为了研究对勾函数 $y=mx+\frac{n}{x}$($mn\neq0$)与标准的双曲线之间的关系,我们有必要对它们的图象进行详细的对比,然后发现我们探索的起点.

学生:由对勾函数 $y=mx+\frac{n}{x}$($mn\neq0$)的图象我们发现它有两条渐近线为 $x=0$ 与 $y=mx$,因此我们把 xOy 坐标轴顺时针旋转 θ(逆时针 $-\theta$)后得到新坐标平面 $x'Oy'$,使得双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线为 y' 轴,设 $P(x,y)$ 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 在 xOy 坐标平面内一点,对应在 $x'Oy'$ 平面内为 $P'(x',y')$,由坐标轴旋转公式我们有$\begin{cases}x=x'\cos\theta+y'\sin\theta\\ y=y'\cos\theta-x'\sin\theta\end{cases}$,设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线的倾斜角为锐角 α,则 $\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$,而 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$,故$\begin{cases}\sin\alpha=\frac{b}{c}\\ \cos\alpha=\frac{a}{c}\end{cases}$,所以$\begin{cases}\sin\theta=\frac{a}{c}\\ \cos\theta=\frac{b}{c}\end{cases}$,所以由

$P(x,y)$到$P'(x',y')$的旋转公式为

$$\begin{cases}x'=\frac{b}{c}\cdot x-\frac{a}{c}\cdot y\\ y'=\frac{b}{c}\cdot y+\frac{a}{c}\cdot x\end{cases}，即\begin{cases}x=\frac{b}{c}\cdot x'+\frac{a}{c}\cdot y'\\ y=\frac{b}{c}\cdot y'-\frac{a}{c}\cdot x'\end{cases}，$$

此时焦点$F(c,0)$变为点$F'(b,a)$，顶点$A(a,0)$变为点$A'(\frac{ab}{c},\frac{a^2}{c})$，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的标准方程变成$\frac{\left(\frac{b}{c}x'+\frac{a}{c}y'\right)^2}{a^2}-\frac{\left(-\frac{a}{c}x'+\frac{b}{c}y'\right)^2}{b^2}=1$，化简可得$y'=\frac{a^2-b^2}{2ab}x'+\frac{ab}{2x'}$，这是一个对勾函数.

拓展结论：对勾函数$y=mx+\frac{n}{x}(mn\neq0)$是双曲线标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$经过旋转后使得$y$轴与渐近线重合时所得到的.

2.4 双曲线的一般方程

拓展 5 从上面的探讨可知，一次分式型函数与对勾函数都是双曲线，那么中心在原点的双曲线的一般方程又是什么

教师：教材只研究了双曲线的标准方程，我们能不能研究双曲线的一般方程呢？问题也就是：xOy坐标平面内的双曲线标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，如果我们把$xOy$坐标平面顺时针旋转$\theta$(逆时针$-\theta$)后得到新坐标平面$x'Oy'$，此时在平面$x'Oy'$内又是怎么样的一种方程的形式？

学生：设平面直线坐标系xOy下的点$P(x,y)$在坐标平面$x'Oy'$下的坐标为$P'(x',y')$，满足$\begin{cases}x=x'\cos\theta+y'\sin\theta\\ y=y'\cos\theta-x'\sin\theta\end{cases}$，代入双曲线标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$后可得$b^2(\cos\theta\cdot x'+\sin\theta\cdot y')^2-a^2(-\sin\theta\cdot x'+\cos\theta\cdot y')^2=a^2b^2$，化简可得双曲线的方程为

$$(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)x'^2+(b^2\sin^2\theta-a^2\cos^2\theta)y'^2+2\sin\theta\cos\theta(a^2+b^2)x'y'=a^2b^2.\ (*)$$

由此得到如下结论：

一般地，当$b^2\sin^2\theta-a^2\cos^2\theta=0$，即$\tan\theta=\frac{a}{b}$时，$(*)$式变为$y'=\frac{a^2-b^2}{2ab}x'+\frac{ab}{2x'}$，为对勾函数；

当$a=b$且$\cos2\theta\neq0$时，$(*)$式为$x'^2-y'^2+2\tan2\theta\cdot x'y'=\frac{a^2}{\cos2\theta}$，此时为等轴双曲线.

特别地，当$a=b$且$\theta=\frac{\pi}{4}$时，$(*)$式$y'=\frac{a^2}{2x'}$，这是一个反比例函数.

3 教学思考

3.1 反思成为探究的起跑点

探究性学习可以引导学生对所学知识的反思. 比如，在学生原先的认知结构中，反比例函数、对勾函数，双曲线分别在代数和几何中以独立的形式存在，通过双曲线的拓展教学，学生进行反思，能够发现反比例函数、对勾函数、双曲线本质上是一样的，它们原本属于同一种几何图形. 这样的学习，进一步加深了学生对原有知识和知识体系的认识，从而可以进一步启发学生对数学的研究思路与方法的反思. 在双曲线的拓展教学中，我们经历了发现相似——举例实验——探索验证——生成结论这一系列的过程，这个过程不仅完善了双曲线这一知识体系，而且可以启发学生在进行代数与几何中的相关问题研究时，我们常常采用的方法是以“形”来发现，以“数”来验证，以此来推动学生逻辑思维的顺利展开，而这也是科学研究的方法之一.

3.2 内化成为素养的发动机

再有，学生在学习过程中，学到的是知识还是智慧，这取决于学生对所学内容的内化程度. 学习论认为，我们不仅要学习知识，更要把知识转化成智慧，而积极的参与交流是知识转化为智慧的路径之一.“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行”，这说明理不辩不明，知识不讨论不探索印象就不深. 所以学生的探究性活动是在教师的引导下，学生围绕具有挑战性的学习主题和任务，全身心参与的学习活动，它非常注重知识间的关联性、层次性和整体性，因此更能够体现学生学习的价值，可以加快学生对所学的数学知识、方法与思想的内化，也更有助于学生分析问题、解决问题能力的提高，从而逐步提升学生的学科核心素养.

(下转第 44 页)

数学建模要用真实情境，让学生体验到数学来源于生活，认识到知识和技能在未来的学习和生活中的价值，从而在数学与问题情境的有效互动中激发学习数学的兴趣，提升了学生的数学核心素养，培养了学生用数学建模解决实际问题能力.

学生主动学习并不是漫无目的的，需要教师精心设置问题进行引导，如由彩绳长度的测量出发，归纳出结论，通过建立数学模型，求解模型使得实际问题得以解决，其中难点就在于对角捆扎彩绳长度的求法，先设置问题解决2条线段问题，进而推广到8条甚至n条线段.

数学实验活动环节学生相对陌生，此时需要教师多多鼓励，学生只有参与其中亲身感知，才能获得数学“源”与“流”的过程；面对求解模型环节，学生想法会比较多，既要展示教学设计方案，也要尊重学生，让学生充分展示其得到求解模型的方法，在其基础上引导并解决问题；还要关注其解决不了的问题在哪里，教师为学生寻找摆脱困境的方法，让学生在课堂中有成就感，形成积极活跃的课堂氛围并让学生逐步具备知难而上的探究精神.

5.2　数学实验教学的思考

通过数学实验教学的内容，激发学生对数学建模的兴趣，引导学生进行深入探究和动手实验，学生的探究实验过程有较高的自由度，教师仅起到观察和引导的作用.在探究和实验过程中对有困难的学生，建议以小组讨论的形式相互指导，实验教学希望学生经历“发现问题→实际问题→探究尝试→形成方案→解决问题”这样一个现实问题解决的过程，同时也将“现实问题→现实模型建立→数学模型建立→数学问题解决→结论返回现实”整个数学建模过程融入其中.数学实验教学内容取材力求从学生熟悉的内容入手进行探究和设计，进而回馈学生的数学知识认知体系，同时教学内容的设计也尽可能将学生所学的数学知识与现实相联系.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京：人民教育出版社，2018：4.14

[2]刘卫锋，何霞，王尚志.高中数学建模中教师问题初探[J].数学通报，2007(10)：13－16

[3]张思明.理解数学：中学数学建模课程的实践案例与探索[M].福州：福建教育出版社，2011：50

[4]张思明，胡凤娟，王尚志.数学建模从走近到走进数学课堂[J].数学教育学报，2017，26(6)：10－13

[5]李明振，喻平.高中数学建模课程实施的背景、问题与对策[J].数学通报，2008，47(11)：8－10

[6]黄英芬，颜宝平，龙红兰.从应用题到建模的回译[J].数学通报，2019，58(9)：34－37

[7]童永健.深挖课本 深入探究 深度理解[J].中学教研(数学).2019(11)：21－24

(上接第39页)

3.3　评价成为学习的催化剂

首先，探究式的课堂教学应该是在教师的引导下，以问题串为主线，通过有效的提问驱动学生的思维，学生在探索过程中，或“发现”结论，或探索失败，这都是正常的现象.在这一过程中，教师要给予及时的点评与反馈，并且不断地关注学生的思维动态，进行持续性的评价，可以推动学生不断的进行反思.评价既要关注学生学习的结果，更要重视学生学习的过程.通过评价，提高学生学习兴趣，帮助学生认识自我，从而实现学生对整个学习过程的反思.因此，师生在一起探索过程中，教师的评价不仅有利于鼓励学生探索问题的积极性，而且更能够促进学生进行深入思考.

4　结束语

探究性的学习活动是学生成就自我的学习，是学生对知识渴求的一种内驱力，体现的是学生的主体性，教师在其中的引领作用不可或缺.在基于问题导向的探究式的数学教学活动中，教师的引导、启发和评价是为了促进学生的感知、体验和参与，促进学生的反思和探索，从而促进学生数学理性思维的发展，促进学生学科核心思维的养成，促进学生学会学习.这其实就是数学教学的魅力所在.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017版)[M].北京：人民教育出版社，2018

[2]国务院办公厅.关于新时代推进普通高中育人方式改革的指导意见.国办发[2019]29号 http://www.gov.cn/zhengce/content/2019－06/19/content_5401568.htm

[3]陈德燕.基于情境、问题导向的探究体验式课堂教学实践[J].数学通报，2020，59(4)：35－38

[4]人民教育出版社，课程教材研究所，中学数学课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书(A版)：数学(选修4－2矩阵与变换)[M].北京：人民教育出版社，2006