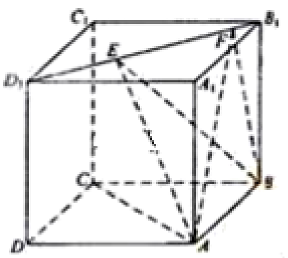
正方体必刷多选题解析

1．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F，且 $EF=\frac{1}{2}$，则下列结论中错误的是(　)



A．$AC\perp AF$

B．EF // 平面 $ABCD$

C．三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值

D．ΔAEF 的面积与 $\triangle BEF$ 的面积相等

【答案】AD

【分析】

通过特殊化，点 F 与点 B_1 重合可判定 A 错误；正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的两个底面平行，判定 B 正确，三角形 BEF 的面积是定值，A 点到面 DD_1B_1B 距离是定值，可判定 C 正确，$\triangle AEF$ 的面积与 $\triangle BEF$ 的面积相等不正确，可判定 D 错误.

【详解】

A． 由题意及图形知，当点 F 与点 B_1 重合时，$\angle CAB_1=60^{o}$ 故选项 A 错误；

B． EF // 平面 $ABCD$，由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的两个底面平行，$EF\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，故有 EF // 平面 $ABCD$，此命题正确，不是正确选项；

C． 三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值，由几何体的性质及图形知，三角形 BEF 的面积是定值，A 点到面 DD_1B_1B 距离是定值，故可得三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值，此命题正确，不是正确选项；

D． 由图形可以看出，B 到线段 EF 的距离与 A 到 EF 的距离不相等，故 $\triangle AEF$ 的面积与 $\triangle BEF$ 的面积相等不正确，故 D 是错误的.

故选：AD

【点睛】

本题考查直线与平面平行、垂直的判定、棱锥的体积，考查空间想象能力与运算求解能力，属于中档题.

2．已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱柱，底面边长为2，高为4，则下列说法正确的是(　)

A．异面直线 AD_1 与 A_1C_1 所成角为 $\frac{\pi}{3}$

B．三棱锥 $A-A_1B_1D_1$ 的外接球的表面积为 24π

C．平面 AB_1D_1 // 平面 BDC_1

D．点 B_1 到平面 A_1BC_1 的距离为 $\frac{4}{3}$

【答案】BCD

【分析】

对于 A：由正四棱柱的性质得 $\angle A_1C_1B$（或其补角）就是异面直线 AD_1 与 A_1C_1 所成的角，再运用余弦定理计算可判断；

对于 B：三棱锥 $A-A_1B_1D_1$ 的外接球与正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球是同一个，由球的表面积公式计算可判断；

对于 C：由正四棱柱的性质结合面面平行的判定可判断；

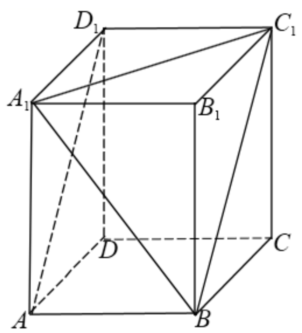
对于 D：设点 B_1 到平面 A_1BC_1 的距离为 d，运用等体积法得 $V_{B_1-A_1BC_1}=V_{A_1-B_1BC_1}$，可求得距离.

【详解】

解：对于 A：由正四棱柱的性质得 $AD_1\parallel BC_1$，所以 $\angle A_1C_1B$（或其补角）就是异面直线 AD_1 与 A_1C_1 所成的角，而正四棱柱的底面边长为 2，高为 4，所以 $A_1C_1=2\sqrt{2}$，$BC_1=A_1B=2\sqrt{5}$，在 $\triangle A_1C_1B$ 中，$\cos\angle A_1C_1B=\dfrac{A_1C_1^2+BC_1^2-A_1B^2}{2\cdot A_1C_1\cdot BC_1}=$

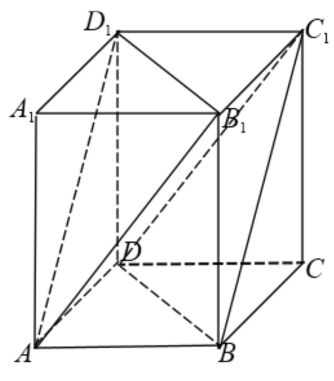
$$\frac{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{5})^2}{2\times(2\sqrt{2})\times(2\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{10}}{10},$$

所以 $\angle A_1C_1B\neq\dfrac{\pi}{3}$，故 A 不正确；



对于 B：三棱锥 $A-A_1B_1D_1$ 的外接球与正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球是同一个，且外接球的半径为 $R=\dfrac{AC_1}{2}=\dfrac{\sqrt{2^2+2^2+4^2}}{2}=\sqrt{6}$，所以外接球的表面积为 $S=4\pi\times(\sqrt{6})^2=24\pi$，故 B 正确；

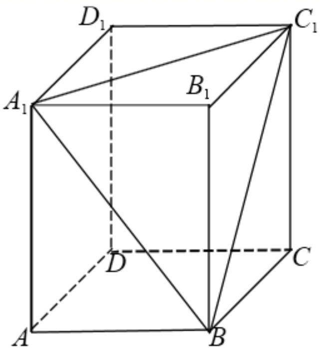
对于 C：由正四棱柱的性质得 $AD_1\parallel BC_1$，又因为 $AD_1\not\subset$ 面 BDC_1，$BC_1\subset$ 面 BDC_1，所以 $AD_1\parallel$ 面 BDC_1，同理证得 $AB_1\parallel$ 面 BDC_1，又 $AD_1\cap AB_1=A$，AD_1，$AB_1\subset$ 面 AB_1D_1，所以平面 $AB_1D_1\parallel$ 平面 BDC_1，故 C 正确；



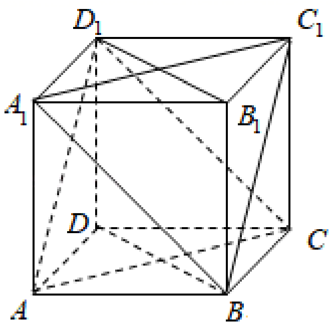
对于 D：设点 B_1 到平面 A_1BC_1 的距离为 d，则 $V_{B_1-A_1BC_1}=V_{A_1-B_1BC_1}$，由 A 选项的解析得 $S_{\triangle A_1BC_1}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=6$，又 $V_{A_1-B_1BC_1}=\dfrac{1}{3}\times A_1B_1\times S_{\triangle B_1BC_1}=\dfrac{1}{3}\times2\times\dfrac{1}{2}\times2\times4=\dfrac{8}{3}$，所以 $V_{B_1-A_1BC_1}=\dfrac{1}{3}\times d\times S_{\triangle A_1BC_1}=\dfrac{1}{3}\times d\times6=\dfrac{8}{3}$，

解得 $d=\frac{4}{3}$，故 D 正确，

故选：BCD.



3．如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则四个推断正确的是(　)



A． $A_1C_1\perp AD_1$　　　　B． $A_1C_1\perp BD$

C．平面 A_1C_1B // 平面 ACD_1　　　　D．平面 $A_1C_1B\perp$ 平面 BB_1D_1D

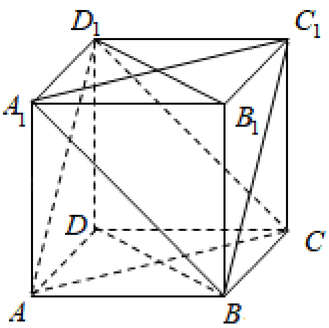
【答案】BCD

【分析】

对于 A，A_1C_1 与 AD_1 成 60° 角；对于 B，由 A_1C_1 // AC，$AC\perp BD$，得 $A_1C_1\perp BD$；对于 C，由 A_1C_1 // AC，AD_1 // BC_1，得平面 A_1C_1B // 平面 ACD_1；对于 D，由 $A_1C_1\perp B_1D_1$，$A_1C_1\perp BB_1$，得平面 $A_1C_1B\perp$ 平面 BB_1D_1D.

【详解】

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，



对于 A，由正方体的性质可知 AD_1 // BC_1，

所以 $\angle A_1C_1B$ 即为异面直线 A_1C_1 与 AD_1 所成的角，

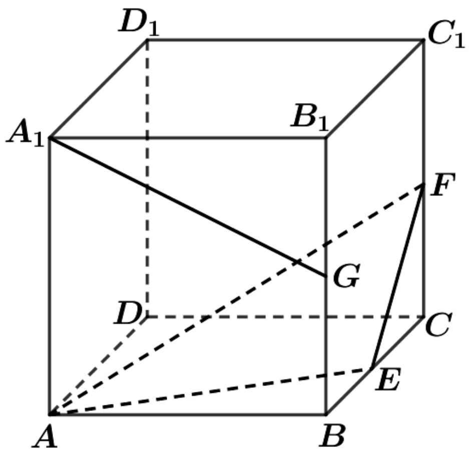
在 $\triangle A_1C_1B$ 中显然 $\angle A_1C_1B=60^\circ$，所以 A_1C_1 与 AD_1 成 60° 角，故 A 错误；

对于 B，$\because A_1C_1$ // AC，$AC\perp BD$，$\therefore A_1C_1\perp BD$，故 B 正确；

对于 C，$\because A_1C_1$ // AC，AD_1 // BC_1，A_1C_1、$BC_1\not\subset$ 平面 ACD_1，AC、$AD_1\subset$ 平面 ACD_1，

$\therefore A_1C_1 \parallel$ 平面 ACD_1，$BC_1 \parallel$ 平面 ACD_1，又 $A_1C_1 \cap BC_1 = C_1$，
$\therefore$ 平面 $A_1C_1B \parallel$ 平面 ACD_1，故 C 正确；
对于 D，$\because A_1C_1 \perp B_1D_1$，$A_1C_1 \perp BB_1$，$B_1D_1 \cap BB_1 = B_1$，$B_1D_1$，$BB_1 \subset$ 平面 BB_1D_1D，
所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1D_1D，又 $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1B
$\therefore$ 平面 $A_1C_1B \perp$ 平面 BB_1D_1D，故 D 正确.
故选：BCD.

4．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E，F，G 分别为 BC，CC_1，BB_1 的中点，则(　)

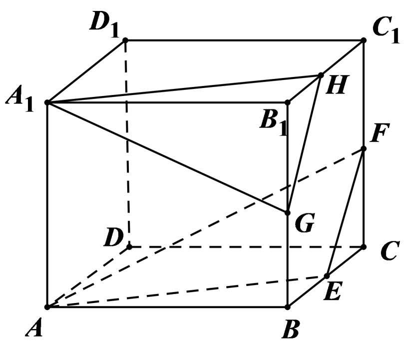


A．直线 D_1D 与直线 AF 垂直
B．直线 A_1G 与平面 AEF 平行
C．平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{2}$
D．点 C 到平面 AEF 的距离为 $\frac{2}{3}$

【答案】BCD

【分析】
A. 设 $D_1D \perp AF$，易证 $D_1D \perp$ 平面 AEF 判断；B.取 B_1C_1 的中点 H，连接 A_1H，GH，证明平面 $A_1HG \parallel$ 平面 AEF 判断；C.接 AD_1，D_1F，易证 $EF \parallel AD_1$，得到截面为等腰梯形 $AEFD_1$ 求解判断；D. 利用等体积法，由 $V_{F-AEC} = V_{C-AEF}$ 求解判断.

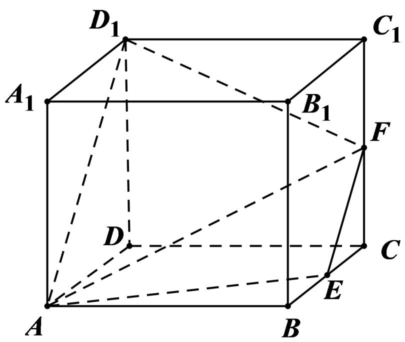
【详解】
A. 若 $D_1D \perp AF$，因为 $D_1D \perp$ 平面 $ABCD$，则 $D_1D \perp AE$，又 $AE \cap AF = A$，所以 $D_1D \perp$ 平面 AEF，则 $D_1D \perp EF$，则 $C_1C \perp EF$，故错误；



B.如图所示：
取 B_1C_1 的中点 H，连接 A_1H，GH，易知 $A_1H \parallel AE$，又 $A_1H \not\subset$ 平面 AEF，$AE \subset$ 平

面 AEF，所以 A_1H // 平面 AEF，同理 GH // 平面 AEF，

又 $A_1H\cap GH=H$，所以平面 A_1HG // 平面 AEF，因为 $A_1G\subset$ 平面 A_1HG，所以 A_1G // 平面 AEF，故正确；



C.如图所示：

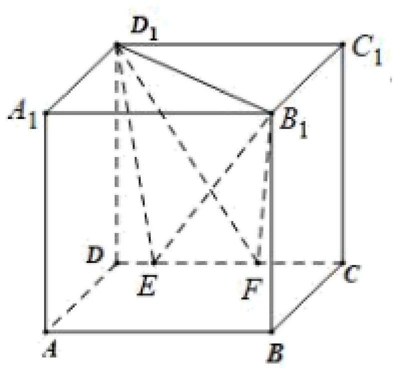
连接 AD_1，D_1F，因为 E，F 分别为 BC，CC_1 的中点，则 EF // AD_1，所以 A，E，F，D_1 共面，则截面为等腰梯形 $AEFD_1$，又 $EF=\sqrt{2}$，$AD_1=2\sqrt{2}$，$AE=\sqrt{5}$，

等腰梯形的高为 $h=\sqrt{AE^2-\left(\dfrac{AD_1-EF}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，所以等腰梯形的面积为 $S=\dfrac{1}{2}(AD_1+EF)\cdot h=\dfrac{9}{2}$，故正确；

D. 因为 $S_{\triangle AEF}=\dfrac{1}{2}EF\cdot h=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}$，$S_{\triangle AEC}=\dfrac{1}{2}EC\cdot B=\dfrac{1}{2}\times 1\times 2=1$，且 $V_{F-AEC}=V_{C-AEF}$，所以点 C 到平面 AEF 的距离为 $d=\dfrac{\frac{1}{3}\times S_{\triangle AEC}\times 1}{\frac{1}{3}\times S_{\triangle AEF}}=\dfrac{2}{3}$，故正确.

故选：BCD

5．如图，设 E，F 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 DC 上两点，且 $AB=2$，$EF=1$，其中正确的命题为(　)



A．三棱锥 D_1-B_1EF 的体积为定值

B．异面直线 D_1B_1 与 EF 所成的角为 $60°$

C．直线 D_1B_1 与平面 B_1EF 所成的角为 $30°$

D．二面角 D_1-EF-B_1 的平面角为 $45°$

【答案】ACD

【分析】

根据题意画出图形，结合体积公式、线线角、线面角及二面角的求解逐项判断即可.

【详解】

解：如图所示，

对 A，三棱锥 D_1-B_1EF 的体积为 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle D_1EF}\cdot B_1C_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times1=\frac{2}{3}$ 为定值，A 正确；

对 B，$EF\parallel D_1C_1$，$\angle B_1D_1C_1$ 或其补角是异面直线 D_1B_1 与 EF 所成的角，为 $45°$，B 错误；

对 C，取 A_1D 的中点 O，连结 D_1O，B_1O，则 $D_1O\perp$ 平面 B_1EF，

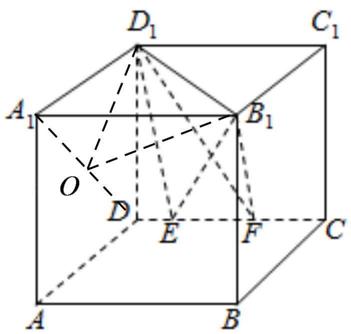
$\angle D_1B_1O$ 为直线 D_1B_1 与平面 B_1EF 所成的角，所以 $\sin\angle D_1B_1O=\frac{D_1O}{D_1B_1}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，

所以直线 D_1B_1 与平面 B_1EF 所成的角为 $30°$，故 C 正确；

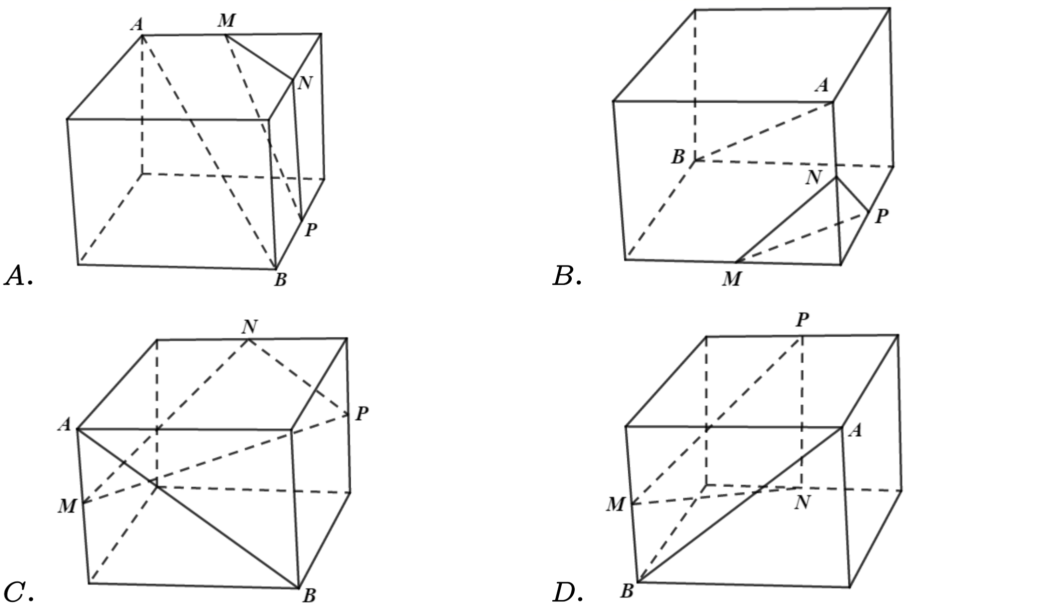
对 D，A_1D，D_1D 均与交线 EF 垂直，所以二面角 D_1-EF-B_1 的平面角为 $\angle A_1DD_1=45°$，

，故 D 正确.

故选：ACD



6．如图，在下列四个正方体中，A，B 为正方件的两个顶点，M，N，P 为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直线 AB 与平面 MNP 平行的是( )



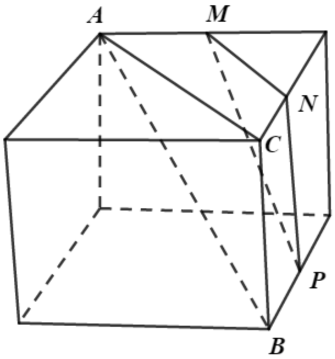
【答案】AC

【分析】

对于选项 A：结合已知条件利用线线平行证明面面平行，然后利用面面平行的性质证明线面平行；对于选项 BD：利用线线的位置关系即可判断线面的位置关系；对于选项 C：利用线面平行的判定定理即可求解.

【详解】

对于 A 选项：过 A 作正方体的面对角线 AC，且 $MN // AC$，如下图所示：



由已知条件可知，$NP // BC$，

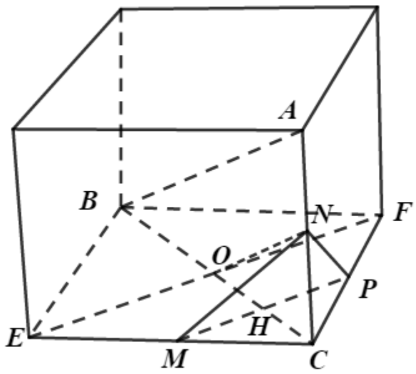
又因为 $MN \cap NP = N$，$AC \cap BC = C$，

所以平面 $MNP //$ 平面 ABC，

又因为 $AB \subset$ 平面 ABC，所以 $AB //$ 平面 MNP，故 A 正确；

对于 B 选项：连接正方体底面对角线 BC 和 EF，相交于 O，且 BC 与 MP 交于 H，连接 ON，

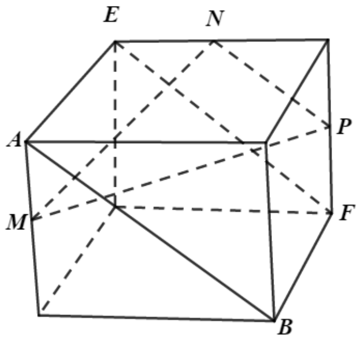
如下图所示：



由上图可知，O 为 BC 的中点，故 $ON // AB$，

因为 ON 与平面 MNP 相交，所以 AB 也与平面 MNP 相交，故 B 错误；

对于选项 C：连接 NP 所在面的正方体的面对角线 EF，且 $NP // EF$，如下图所示：

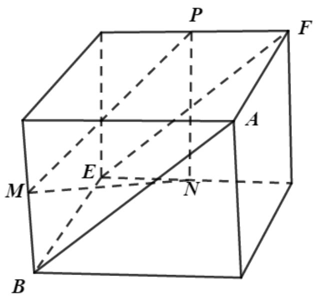


由已知条件和正方体的结构特征可知，$AB // EF // NP$，

因为 $AB \not\subset$ 平面 MNP，$NP \subset$ 平面 MNP，

所以 $AB //$ 平面 MNP，故 C 正确；

对于选项 D：连接 NP 所在面的正方体的面对角线 EF，且 $EF // AB$，如下图所示：

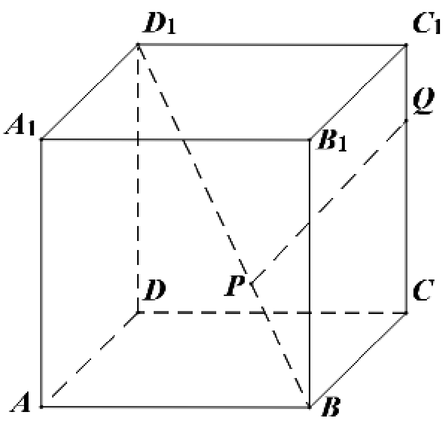


因为 EF 和 NP 相交，且 $EF \not\subset$ 平面 MNP，所以 EF 和平面 MNP 相交，

从而 AB 与平面 MNP 相交，故 D 错误.

故选：AC.

7．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2．点 P 在正方体的体对角线 D_1B 上(包含端点)，点 Q 在正方体的棱 CC_1 上(包含端点)，则( )



A．直线 D_1B 与 CC_1 的距离为 2

B．点 P 在 D_1B 上运动，点 Q 在 CC_1 上运动时，$|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$

C．当点 P、Q 分别为 D_1B、CC_1 的中点时，PQ 到面 $ABCD$ 的距离为 1

D．当点 Q 为棱 CC_1 的中点，点 P 在 D_1B 上运动时，存在点 P，使得 $PQ \perp$ 面 BDD_1B_1

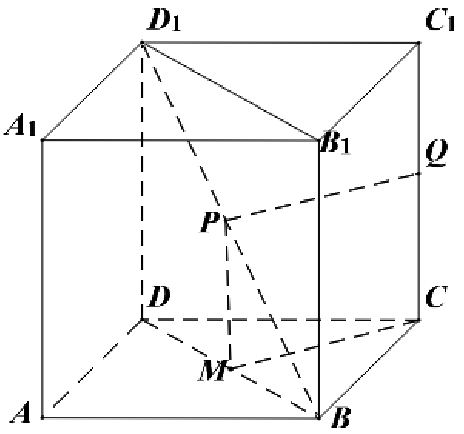
【答案】BCD

【分析】

作出直线 BD_1, CC_1 的中垂线，进而判断 A, B，通过线面垂直的证明可以判断 C 和 D.

【详解】

如图：



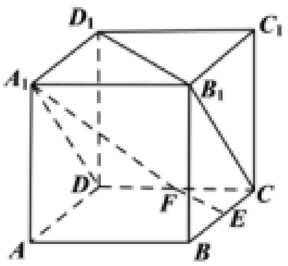
当 P, Q 分别为 BD_1, CC_1 的中点时，取 BD 中点 M，连接 PM, MC，则 $PM \parallel D_1D$，$PM=\frac{1}{2}D_1D$，易知 $QC \parallel D_1D$，$QC=\frac{1}{2}D_1D$，所以 $PM \parallel QC$，$PM=QC$，则四边形 $PMCQ$ 为平行四边形，所以 $PQ \parallel MC$，$PQ=MC$. 易知 $MC \perp BD$，而 $D_1D \perp$ 平面 $ABCD$，$MC \subset$ 平面 $ABCD$，则 $D_1D \perp MC$，又 $D_1D \cap BD=D$，所以 $MC \perp$ 平面 BB_1D_1D，则 $MC \perp BD_1$，又 $PQ \parallel MC$，所以 $PQ \perp BD_1$. 又因为 $CC_1 \perp MC$，所以 $CC_1 \perp PQ$. 于是 PQ 是 BD_1 与 CC_1 的垂线段，且 $PQ=MC=\sqrt{2}$. 故 A 错误，因为连接两条异面直线上两点的线段中，垂线段的距离最大，故 B 正确；

而此时 PQ 到面 $ABCD$ 的距离 $d=PM=1$，故 C 正确；

由前面的证明可知，此时 $MC \perp$ 平面 BB_1D_1D，$PQ \parallel MC$，所以 $PQ \perp$ 平面 BB_1D_1D，故 D 正确.

故选：BCD.

8．已知 E，F 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BC 和 CD 的中点，则（　）



A． A_1D 与 B_1D_1 是异面直线

B． A_1D 与 EF 所成角的大小为 45°

C． A_1F 与平面 B_1EB 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$

D．二面角 $C-D_1B_1-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】ACD

【分析】

A 选项：根据异面直线的定义进行判断即可；B，C，D 选项：以 D 为原点，DA, DC, DD_1 分别为 x，y，z 轴建立直角坐标系，通过空间向量的方法进行计算即可.

【详解】

对选项 A，由图知：A_1D 与 B_1D_1 是异面直线，故 A 正确；

以 D 为原点，DA, DC, DD_1 分别为 x, y, z 轴建立直角坐标系，设正方体边长为 2，

对选项 B，$D(0,0,0)$, $A_1(2,0,2)$, $E(1,2,0)$, $F(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1D}=(-2,0,-2)$, $\overrightarrow{EF}=(-1,-1,0)$，设 A_1D 与 EF 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{A_1D}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{2}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

又因为 $0^\circ<\theta\leqslant 90^\circ$，所以 $\theta=60^\circ$，故 B 错误；

对选项 C，由题知：平面 BEB_1 的法向量为 $\overrightarrow{DC}$，

因为 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{A_1F}=(-2,1,-2)$，

设 A_1F 与平面 B_1EB 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{A_1F}|\cdot|\overrightarrow{DC}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{9}}=\dfrac{1}{3}$，故 C 正确

对选项 D，$\overrightarrow{D_1B_1}=(2,2,0)$, $\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，设平面 D_1B_1B 的法向量 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}=2x_1+2y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BB_1}=2z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=1$，得 $\vec{m}=(1,-1,0)$；

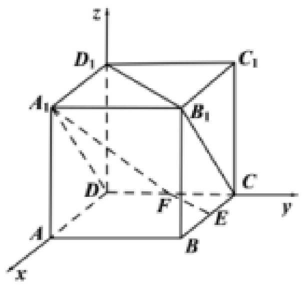
设平面 D_1B_1C 的法向量 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$, $\overrightarrow{B_1C}=(-2,0,-2)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}=2x_2+2y_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1C}=-2x_2-2z_2=0\end{cases}$，令 $x_2=1$，得 $\vec{n}=(1,-1,-1)$，

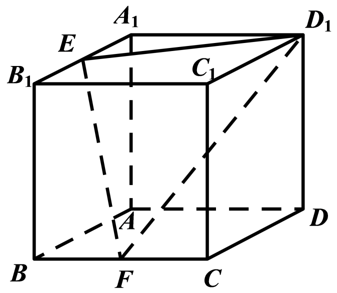
设二面角 $C-D_1B_1-B$ 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

又因为 θ 为锐角，所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故 D 正确，

故选：ACD.



9．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别为 A_1B_1，BC 的中点，设过点 E，F，D_1 的平面为 α，则下列说法正确的是(　)



A．$\triangle EFD_1$ 为等边三角形；

B．平面 α 交正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面为五边形；

C．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，存在棱与平面 α 平行；

D．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，不存在棱与平面 α 垂直；

【答案】BD

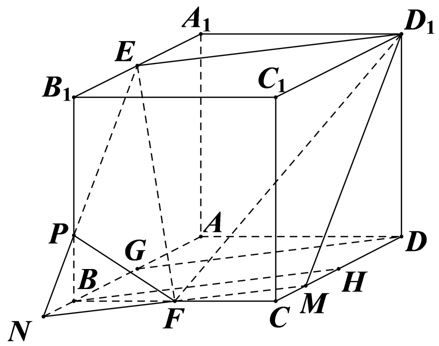
【分析】

设正方体棱长为2，求出 $\triangle EFD_1$ 各边长可判断 A；根据平面的性质作出截面可判断 B；分别判断三组平行线与 α 的位置关系即可判断 CD.

【详解】

对 A，设正方体棱长为2，则易得 $ED_1=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{6}$，$D_1F=3$，故 $\triangle EFD_1$ 不是等边三角形，故 A 错误；

对 B，如图，取 AB 中点 G，易得 $D_1E \parallel DG$，取 CD 中点 H，连接 BH，则易得 $BH \parallel DG$，再取 CH 中点 M，连接 FM，则 $FM \parallel BH$，所以 $FM \parallel D_1E$，所以 FM 是平面 α 与正方体底面 $ABCD$ 的交线，延长 MF，与 AB 的延长线交于 N，连接 EN，交 BB_1 于 P，则可得五边形 D_1EPFM 即为平面 α 交正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面，故 B 正确；



对 C，因为 $BC\cap\alpha=F$，$BC\not\subset\alpha$，所以 BC，AD，A_1D_1，B_1C_1 都不与 α 平行，又 $A_1B_1\cap\alpha=E$，$A_1B_1\not\subset\alpha$，所以 A_1B_1，AB，CD，C_1D_1 都不与 α 平行，因为 $DD_1\cap\alpha=D_1$，$DD_1\not\subset\alpha$，所以 DD_1，CC_1，BB_1，AA_1 都不与 α 平行，故不存在棱与平面 α 平行，故 C 错误；

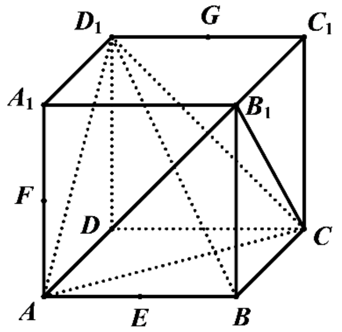
对 D，显然 A_1B_1 与 D_1E 不垂直，所以 A_1B_1 与 α 不垂直，则 AB，CD，C_1D_1 都不与 α 垂直；

因为 DD_1 与 D_1F 不垂直，所以 DD_1 与 α 不垂直，则 CC_1，BB_1，AA_1 都不与 α 垂直；

因为 A_1D_1 与 D_1E 不垂直，所以 A_1D_1 与 α 不垂直，则 BC, AD, B_1C_1 都不与 α 垂直；所以不存在棱与平面 α 垂直，故 D 正确.

故选：BD.

10．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，点 E、F、G 分别为棱 AB、AA_1、C_1D_1 的中点，则下列结论中,正确的是(　)



A．过 E、F、G 三点作正方体的截面，所得截面面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

B． B_1C 与平面 B_1D_1DB 所成的角为 60°

C．异面直线 EF 与 BD_1 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D．四面体 $A-CB_1D_1$ 的体积等于 $\frac{1}{2}$

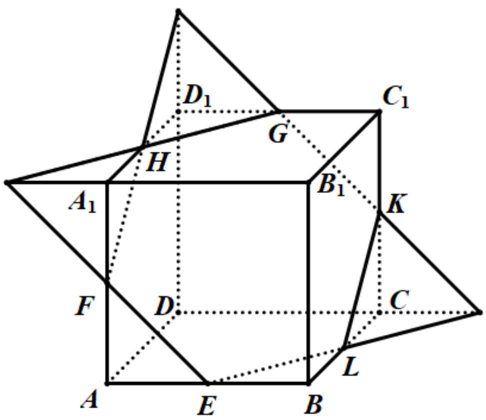
【答案】AC

【分析】

对于 A，作出截面，直接计算其面积即可；对于 B，连接 BD，交 AC 于 O，连接 OB_1，则 $\angle OB_1C$ 是 B_1C 与平面 B_1D_1DB 所成的角，然后计算即可；对于 C，连接 A_1B，则 $\angle A_1BD_1$ 异面直线 EF 与 BD_1 所成角，然后计算；对于 D，由于 $V_{A-CB_1D_1}=V_{B_1-ACD_1}$，所以计算 $V_{B_1-ACD_1}$ 即可

【详解】

对于 A 如图，过 E、F、G 三点的截面为正六边形 $EFHGKL$，因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，所以正六边形 $EFHGKL$ 的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以正六边形 $EFHGKL$ 的面积为 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，所以 A 正确；

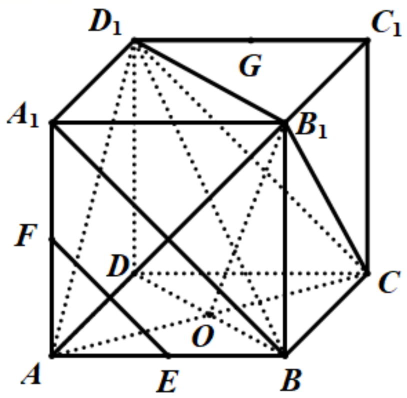


对于 B，连接 BD，交 AC 于 O，连接 OB_1，因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面

$ABCD$，所以 $BB_1 \perp AC$，因为 $AC \perp BD$，$BB_1 \cap BD = B$，所以 $AC \perp$ 平面 B_1D_1DB，所以 $\angle OB_1C$ 是 B_1C 与平面 B_1D_1DB 所成的角，因为正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，所以 $B_1C = \sqrt{2}$，$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin\angle OB_1C = \frac{OC}{B_1C} = \frac{1}{2}$，所以 $\angle OB_1C = 30°$，所以 B 错误；

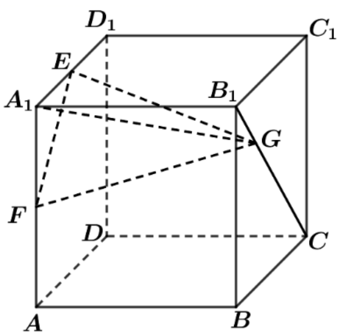
对于 C，连接 A_1B，因为点 E、F 分别为棱 AB、AA_1 的中点，所以 $EF /\!/ A_1B$，所以 $\angle A_1BD_1$ 是异面直线 EF 与 BD_1 所成角，则 $\tan\angle A_1BD_1 = \frac{A_1D_1}{A_1B} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以异面直线 EF 与 BD_1 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 C 正确；

对于 D，因为正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，所以点 B_1 到平面 ACD_1 的距离为 $\frac{2}{3}DB_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $V_{A-CB_1D_1} = V_{B_1-ACD_1} = \frac{1}{3}S_{\triangle ACD_1} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$，所以 D 错误，



故选：AC

11．如图，棱长为2的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为棱 A_1D_1、AA_1 的中点，G 为面对角线 B_1C 上一个动点，则下列选项中正确的是(　)



A．三棱锥 $A_1 - EFG$ 的体积为定值 $\frac{1}{3}$.

B．存在 $G \in$ 线段 B_1C，使平面 $EFG /\!/$ 平面 BDC_1.

C．G 为 B_1C 上靠近 B_1 的四等分点时，直线 EG 与 BC_1 所成角最小.

D．若平面 EFG 与棱 AB，BC 有交点，记交点分别为 M，N，则 $MF + MN$ 的取值范围是 $[\sqrt{5}, \sqrt{13}]$.

【答案】ACD

【分析】

利用锥体的体积公式可判断 A 选项的正误；以点 D 为坐标原点，DA、DC、DD_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，利用空间向量法可判断 BC 选项的正误；设 $AM=y$，则 $BN=\frac{2}{y}-1$，则 $MF+MN=2\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}$，根据 y 的范围可判断 D 选项的正误.

【详解】

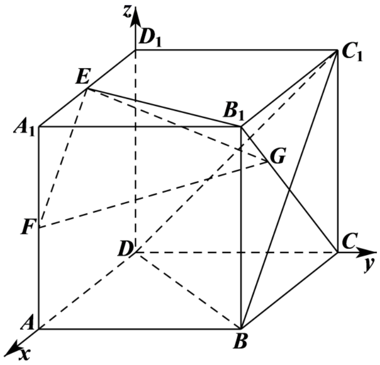
对于 A 选项，因为 $G\in$ 平面 BB_1C_1C，平面 BB_1C_1C // 平面 AA_1D_1D，

所以，点 G 到平面 AA_1D_1D 的距离等于 AB，

$\triangle A_1EF$ 的面积为 $S_{\triangle A_1EF}=\frac{1}{2}A_1E\cdot A_1F=\frac{1}{2}$，

所以，$V_{A_1-EFG}=V_{G-A_1EF}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1EF}\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{3}$，$A$ 选项正确；

对于 BC 选项，以点 D 为坐标原点，DA、DC、DD_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，



则 $A(2,0,0)$、$B(2,2,0)$、$C(0,2,0)$、$D(0,0,0)$、$A_1(2,0,2)$、$B_1(2,2,2)$、$C_1(0,2,2)$、$D_1(0,0,2)$，$E(1,0,2)$、$F(2,0,1)$，

设平面 BDC_1 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,2,2)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=2x_1+2y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DC_1}=2y_1+2z_1=0\end{cases}$，取 $y_1=-1$，可得 $\vec{m}=(1,-1,1)$，

设 $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CB_1}=\lambda(2,0,2)=(2\lambda,0,2\lambda)$，可得点 $G(2\lambda,2,2\lambda)$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，

则 $\overrightarrow{EG}=(2\lambda-1,2,2\lambda-2)$，

所以 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{EG}=2\lambda-1-2+2\lambda-2=4\lambda-5=0$，解得 $\lambda=\frac{5}{4}\notin[0,1]$，

故平面 EFG 与平面 BDC_1 不平行，B 选项错误，

$\because\overrightarrow{EG}=(2\lambda-1,2,2\lambda-2)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$，

设直线 EG 与 BC_1 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos<\overrightarrow{EG},\overrightarrow{BC_1}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{BC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{EG}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC_1}\right|}=$

$\frac{2}{\sqrt{(2\lambda-1)^2+4+(2\lambda-2)^2}\cdot 2\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{16\lambda^2-24\lambda+18}}=\frac{1}{\sqrt{16\left(\lambda-\frac{3}{4}\right)^2+9}}$，

当 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时，$\cos\theta$ 取得最大值，此时 θ 最小，C 选项正确；

对于 D 选项，延长 EF 和 DA 并相交于点 K，作 PN // BC_1 交 BC 于 N，

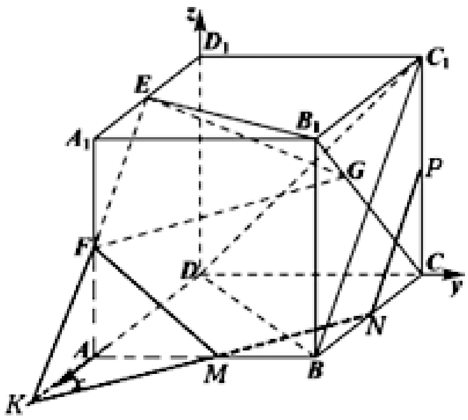
P 在线段 C_1C 上，此时 PN 与 B_1C 的交点即为 G，连接 KN 交 AB 于 M，如图所示：

设 $AM=y$，则 $BN=\frac{2}{y}-1$，所以 $MF=\sqrt{1+y^2}$，$MN=\sqrt{(2-y)^2+\frac{(2-y)^2}{y^2}}$

则 $MF+MN=\sqrt{1+y^2}+\sqrt{(2-y)^2+\frac{(2-y)^2}{y^2}}=\sqrt{1+y^2}\left(1+\frac{2-y}{y}\right)=\frac{2}{y}\sqrt{1+y^2}=$

$2\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}$

由于 $BN=\frac{2}{y}-1\in[0,2]$，得 $\frac{2}{3}\leqslant y\leqslant 2$，所以 $MF+MN\in[\sqrt{5},\sqrt{13}]$，$D$ 正确.

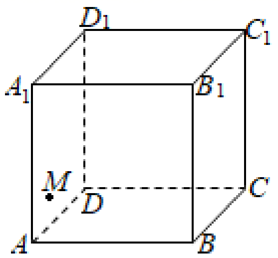


故选：ACD

【点睛】

关键点点睛：解决本题的关键是空间向量及函数思想的应用.

12．如图，点 M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中的侧面 ADD_1A_1 上的一个动点，则下列结论正确的是(　)



A．点 M 存在无数个位置满足 $CM\perp A_1D$

B．若正方体的棱长为1，三棱锥 $B-C_1MD$ 的体积最大值为 $\frac{1}{3}$

C．在线段 AD_1 上存在点 M，使异面直线 B_1M 与 CD 所成的角是30°

D．点 M 存在无数个位置满足到直线 AD 和直线 C_1D_1 的距离相等

【答案】ABD

【分析】

画出示意图，由直线与平面垂直的判定定理，可判断 A 正确；求出三棱锥 $B-C_1MD$ 体积的最大值，可判定 B 正确；由线面角的概念，求得其正切值，可判定 C 错误；根据抛物线的定义，可得 M 的轨迹为平面 ADD_1A_1 上抛物线的部分，可判断 D 正确.

【详解】

如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$CD\perp$ 平面 ADD_1A_1，则 $CD\perp AD_1$，

又由 $AD_1\perp A_1D$，$A_1D\cap DC=D$，所以 $AD_1\perp$ 平面 A_1DC，

当点 M 在线段 A_1D 上时，可得 $CM\perp A_1D$，所以 A 正确；

由正方体的性质，可知 $A_1C\perp$ 平面 BC_1D，若正方体的棱长为1，

则 M 与 A_1 重合时，三棱锥 $B-C_1MD$ 的体积取得最大值，

最大值为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}$，所以 B 正确；

异面直线 B_1M 与 CD 所成的角，即为 $\angle A_1B_1M$，

当 M 在线段 AD_1 上运动时，取 AD_1 的中点 M 时，$\angle A_1B_1M$ 最小，

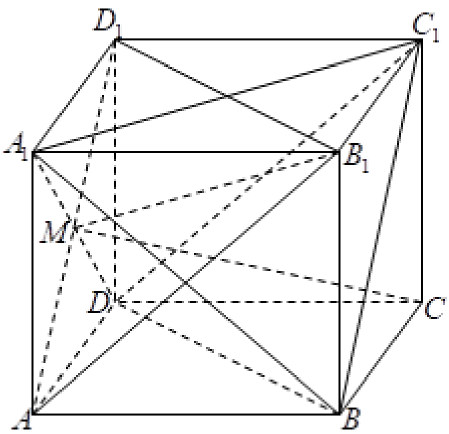
可得 $\tan\angle A_1B_1M=\frac{A_1M}{A_1B_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 C 错误；

平面 ADD_1A_1 上的点 M 到直线 C_1D_1 的距离等于点 M 到 D_1 的距离，

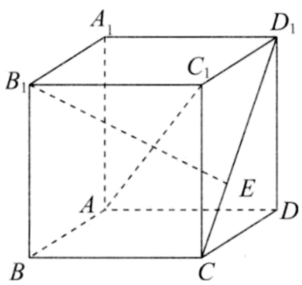
则满足到直线 AD 和直线 C_1D_1 的距离相等，即满足到直线 AD 和点 D_1 的距离相等，

可知 M 的轨迹为平面 ADD_1A_1 上抛物线的部分，故 D 正确.

故选：ABD.



13．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是线段 CD_1 上的动点，则下列判断正确的是( )



A．当点 E 与点 D_1 重合时，$B_1E\perp AC$

B．若异面直线 B_1E 与 AD 所成的角为 θ，则 $\cos\theta$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C．无论点 E 在线段 CD_1 的什么位置，都有 $AC_1\perp B_1E$

D．当点 E 与线段 CD_1 的中点重合时，B_1E 与 AC_1 异面

【答案】ABC

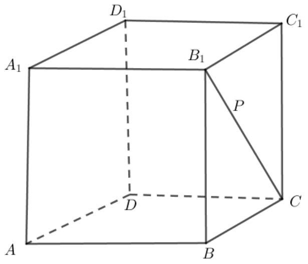
【分析】

利用异面直线所成角定义可判 A 正误；利用最小角定理可判 B 正误；利用线面垂直可判 C 正误，利用两直线在同一平面可判 D 正误.

【详解】

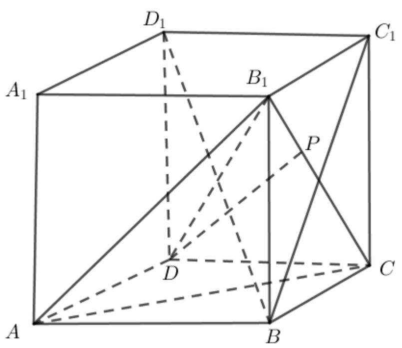
对于 A，当点 E 与点 D_1 重合时，$B_1D_1 // BD$，$AC \perp BD$，$\therefore B_1D_1 \perp AC$，
即 $B_1E \perp AC$，故命题正确；
对于 B，$\because AD // B_1C_1$，异面直线 B_1E 与 AD 所成的角即为异面直线 B_1E 与 B_1C_1 所成的角，
根据最小角定理，B_1C_1 与 B_1E 所成角的最小值即为 B_1C_1 与平面 B_1CD_1 所成角，
由三余弦定理可得 $\cos\angle C_1B_1C = \cos\theta\cos30^{\circ}$，即 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故命题正确；
对于 C，$\because AC_1 \perp$ 平面 B_1CD_1，$\therefore AC_1 \perp B_1E$，故命题正确；
对于 D，当点 E 与线段 CD_1 的中点重合时，$CD_1 \cap C_1D = E$，显然 B_1E 与 AC_1 均在平面 ADC_1B_1，故命题错误.
故选：ABC

14．如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在线段 B_1C 上运动，则正确的结论是(　)



A．一定有 $AP \perp BD_1$；
B．异面直线 AP 与 A_1D 所成的角的取值范围为 $[45^0, 90^0]$；
C．直线 C_1P 与平面 A_1C_1D 所成角的正弦值的最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；
D．$DP+AP$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{2}$.

【答案】AC
【分析】
利用三垂线定理能证明 $BD_1 \perp$ 面 AB_1C 即可判断 A，找到异面成角的最小值的情况即可判断选项 B，转化直线 C_1P 与平面 A_1C_1D 所成角的正弦值的最大值为直线 C_1P 与直线 BD_1 所成角的余弦值最大,进而判断选项 C，通过翻折两个三角形在同一个面上，根据两点间连线最短判断 D.
【详解】
如图，



选项 A，由 $AB_1 \perp A_1B$，$AC \perp BD$，根据三垂线定理可知 $AB_1 \perp BD_1$，$AC \perp BD_1$,又

$AB_1 \cap AC$,可得 $BD_1 \perp$ 平面 AB_1C,所以 $BD_1 \perp AP$,故 A 正确;

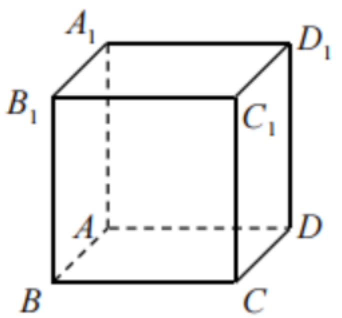
选项 B,当点 P 与线段 B_1C 的端点重合时,AP 与 A_1D 所成角取得最小值为 60°,故 B 错误;

选项 C,因为直线 $BD_1 \perp$ 平面 A_1C_1D,所以若直线 C_1P 与平面 A_1C_1D 所成角的正弦值最大,则直线 C_1P 与直线 BD_1 所成角的余弦值最大,则 P 运动到 B_1C 中点处,即所成角为 $\angle C_1BD_1$,设棱长为1,在 $Rt\Delta D_1C_1B$ 中,$\cos\angle C_1BD_1=\dfrac{C_1B}{BD_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,故 C 正确;

选项 D,将 $\triangle AB_1C$ 与 $\triangle DB_1C$ 翻折到同一平面,则 $\angle DCB_1=\frac{\pi}{2}$,正三角形中 $\angle ACB_1=\frac{\pi}{3}$,所以 $\angle ACD=\frac{5\pi}{6}$,$AC=\sqrt{2}$,$CD=1$,$AD^2=2+1-2\sqrt{2}\cdot1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3+\sqrt{6}$,所以 $DP+AP$ 的最小值为 $AD=\sqrt{3+\sqrt{6}}$,故 D 错误.

故选:AC

15．在如图所示的棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 P 在侧面 BCC_1B_1 所在的平面上运动,则下列命题中正确的(　)



A．若点 P 总满足 $PA\perp BD$,则动点 P 的轨迹是一条直线

B．若点 P 到点 A 的距离为 $\sqrt{2}$,则动点 P 的轨迹是一个周长为 2π 的圆

C．若点 P 到直线 AB 的距离与到点 C 的距离之和为1,则动点 P 的轨迹是椭圆

D．若点 P 到平面 BAA_1B_1 与到直线 CD 的距离相等,则动点 P 的轨迹抛物线.

【答案】ABD

【分析】

根据线面垂直的判定定理可得 $BD\perp$ 面 ACC_1A_1,可得 $PA\subset$ 面 ACC_1A_1,进而可得 P 在面 ACC_1A_1 与面 BCC_1B_1 的交线上可判断 A;由已知可得动点 P 的轨迹是以 B 为圆心,1为半径的小圆(在平面 BCC_1B_1 内),可判断 B;由 $PB+PC=1=BC$ 可判断 C;根据点到平面的距离以及点到直线的距离结合抛物线的定义可判断 D;进而可得正确选项.

【详解】

对于 A:因为 $CC_1\perp$ 面 $ABCD$,$BD\subset$ 面 $ABCD$,可得 $CC_1\perp BD$,

因为 $AC\perp BD$,$AC\cap CC_1=C$,所以 $BD\perp$ 面 ACC_1A_1,

因为点 P 总满足 $PA\perp BD$,所以 $PA\subset$ 面 ACC_1A_1,点 $P\in$ 面 ACC_1A_1,

因为 $P\in$ 面 BCC_1B_1,所以点 P 在面 ACC_1A_1 与面 BCC_1B_1 的交线上,

所以动点 P 的轨迹是一条直线 CC_1,故选项 A 正确;

对于 B:点 P 的轨迹是以 A 为球心,半径为 $\sqrt{2}$ 的球面与平面 BCC_1B_1 的交线,即点 P 的

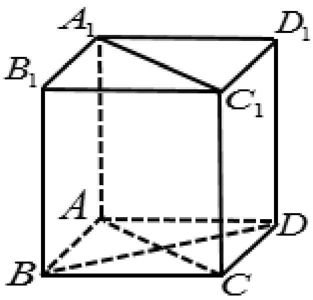
轨迹是小圆，设小圆的半径为r，因为球心A到平面BCC_1B_1的距离为$AB=1$，所以$r=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}=1$，交线即以$B$为圆心，1为半径的小圆(在平面$BCC_1B_1$内)，所以小圆的周长为$2\pi r=2\pi$，

故选项B正确；

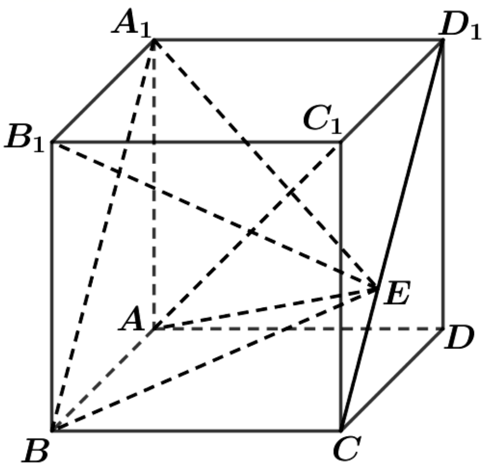
对于C：点P到直线AB的距离即是点P到点B的距离，即平面BCC_1B_1内点P满足$PB+PC=1=BC$，所以满足条件的点P的轨迹是线段BC，而不是椭圆，故选项C不正确；

对于D：点P到平面BAA_1B_1与到直线CD的距离相等，则动点P的轨迹是以线段BC的中点为顶点，直线BC为对称轴的抛物线，(在平面BCC_1B_1内)，故选项D正确；

故选：ABD.



16．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E是线段CD_1上的动点，则下列判断正确的是(　)



A．无论点E在线段CD_1的什么位置，三棱锥A_1-ABE的体积为定值

B．无论点E在线段CD_1的什么位置，都有$AC_1\perp B_1E$

C．当点E与线段CD_1的中点重合时，B_1E与AC_1异面

D．若异面直线B_1E与AD所成的角为θ，则$\sin\theta$的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

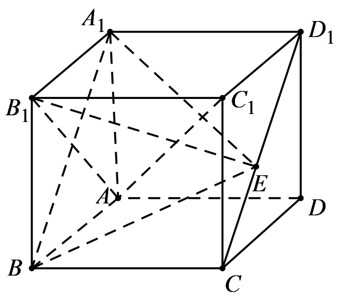
【答案】AB

【分析】

A.根据$CD_1//$平面A_1ABB_1，得到点E到平面A_1ABB_1的距离为BC，再由$S_{\triangle A_1AB}=\dfrac{1}{2}\times A_1A\times AB$判断；$B$.易证$AC_1\perp$平面$B_1D_1C$判断；$C$.由$B_1E\subset$平面$AB_1C_1D$，$AC_1\subset$平面$AB_1C_1D$判断；$D$.建立空间直角坐标系，利用向量法求解判断.

【详解】

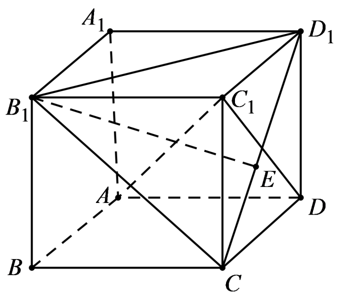
A.如图所示：



因为 $CD_1 /\!/$ 平面 A_1ABB_1，所以点 E 到平面 A_1ABB_1 的距离为 BC，而 $S_{\triangle A_1AB}=\frac{1}{2}\times A_1A\times AB$，

所以三棱锥 A_1-ABE 的体积为 $V_{E-A_1AB}=\frac{1}{6}\times A_1A\times AB\times BC$ 是定值，故正确；

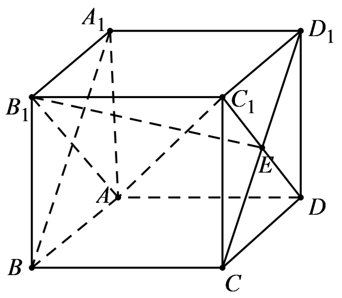
B.如图所示：



，

因为 $B_1C_1\perp$ 平面 C_1CDD_1，则 $B_1C_1\perp CD_1$，又 $C_1D\perp CD_1$，且 $B_1C_1\cap C_1D=C_1$，
所以 $CD_1\perp$ 平面 B_1C_1DA，则 $CD_1\perp AC_1$，同理 $B_1D_1\perp AC_1$，又 $CD_1\cap B_1D_1=D_1$，
所以 $AC_1\perp$ 平面 B_1D_1C，又 $B_1E\subset$ 平面 B_1D_1C，所以 $AC_1\perp B_1E$，故正确；

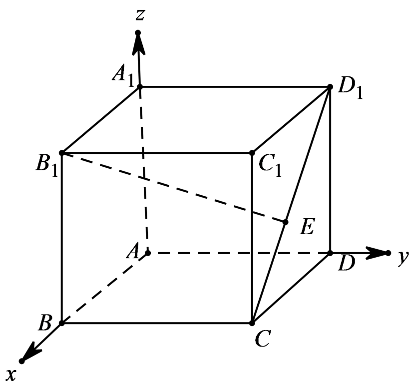
C.如图所示：



，

当点 E 与线段 CD_1 的中点重合时，$B_1E\subset$ 平面 AB_1C_1D，$AC_1\subset$ 平面 AB_1C_1D，则 B_1E 与 AC_1 相交，故错误；

D.建立如图所示空间直角坐标系：



设 $E(x,2,2-x)$，则 $B_1(2,0,2)$，$A(0,0,0)$，$D(0,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{B_1E}=(x-2,2,-x)$，

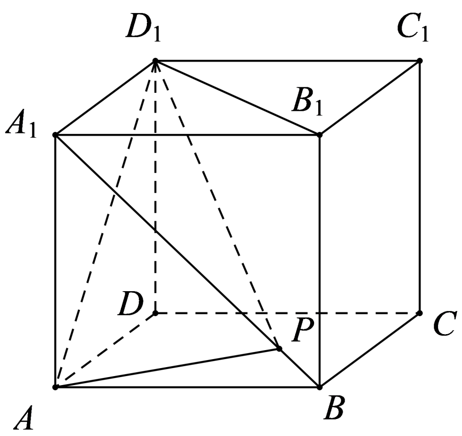
则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{B_1E}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{B_1E}|}=\dfrac{2}{\sqrt{(2-x)^2+4+x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2[(x-1)^2+3]}}$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{2}{(x-1)^2+3}}$，当 $x=1$ 时，$\sin\theta$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故错误.

故选：AB

17．如图，棱长为1的正方体 $ABCD-A_1BC_1D_1$ 中 P 为线段 A_1B 上的动点(不含端点)则下列结论正确的是(　)



A．直线 D_1P 与 AC 所成的角可能是 $\frac{\pi}{6}$

B．平面 $D_1A_1P\perp$ 平面 A_1AP

C．三棱锥 D_1-CDP 的体积为定值

D．平面 APD_1 截正方体所得的截面可能是直角三角形

【答案】BC

【分析】

对于 A 选项，建立坐标系，利用坐标法求解；对于 B 选项，由正方体的性质可知 $D_1A_1\perp$ 平面 A_1AP，进而可判断；对于 C 选项，利用等体积法求解即可判断；对于 D 选项，分别讨论所成的截面图形即可判断.

【详解】

解：对于 A 选项，如图1，建立空间直角坐标系，

则 $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $A_1(1,0,1)$, $D(0,0,0)$, $D_1(0,0,1)$, $C(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$, $\overrightarrow{D_1P}=\overrightarrow{D_1A_1}+\lambda\overrightarrow{A_1B}=(1,0,0)+\lambda(0,1,-1)=(1,\lambda,-\lambda)$, $\lambda\in(0,1)$，

所以 $\left|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{D_1P}\rangle\right|=\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\lambda^2+1}}=\sqrt{\dfrac{(1-\lambda)^2}{4\lambda^2+2}}$，令 $f(\lambda)=\dfrac{(1-\lambda)^2}{4\lambda^2+2}$, $\lambda\in(0,1)$，

$f'(\lambda)=\dfrac{8\lambda^2-4\lambda-4}{(4\lambda^2+2)^2}=\dfrac{4(2\lambda+1)(\lambda-1)}{(4\lambda^2+2)^2}<0$, $\lambda\in(0,1)$，

所以 $f(\lambda)=\dfrac{(1-\lambda)^2}{4\lambda^2+2}$, $\lambda\in(0,1)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，

由于 $f(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $f(1)=0$，

所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\left|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{D_1P}\rangle\right|<0$，即直线 D_1P 与 AC 所成的角 θ 满足 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\theta<0$，

又因为 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，故 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，故直线 D_1P 与 AC 所成的角不可能是 $\frac{\pi}{6}$，故 A 选项错误；

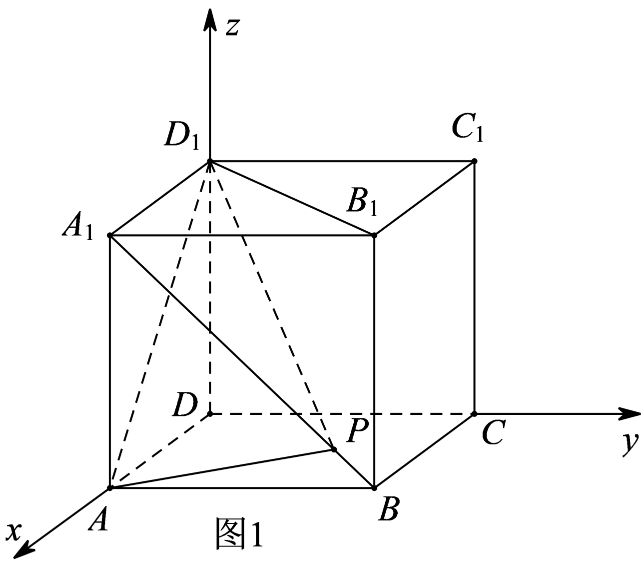


图1

对于 B 选项，由正方体的性质可知 $D_1A_1\perp$ 平面 A_1AP，所以平面 $D_1A_1P\perp$ 平面 A_1AP，故 B 选项正确；

对于 C 选项，三棱雉 D_1-CDP 的体积 $V_{D_1-CDP}=V_{P-CDD_1}=\dfrac{1}{3}\times S_{CDD_1}\times AD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times1=\dfrac{1}{6}$，是定值，故 C 选项正确；

对于 D 选项，设 A_1B 的中点为 O，当 P 点在线段 OB(不包含端点)上时，此时平面 APD_1 截正方体所得的截面为 $AEFD_1$ 梯形，如图 2；当 P 点在 O 点时，此时平面 APD_1 截正方体所得的截面正三角形 AB_1D_1；当 P 点在线段 OA_1(不包含端点)上时，此时平面 APD_1 截正方体所得的截面为等腰三角形 AD_1G，该三角形不可能为直角三角形，故 D 选项错误；

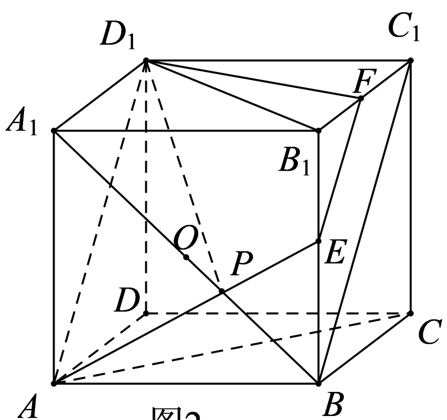


图2

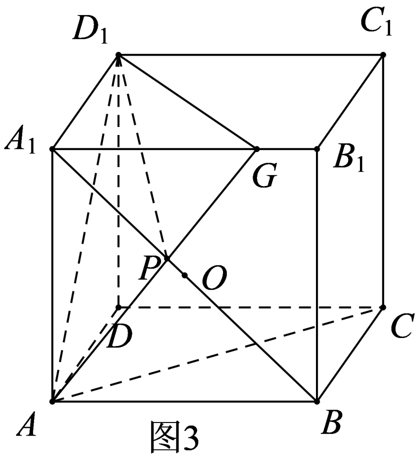
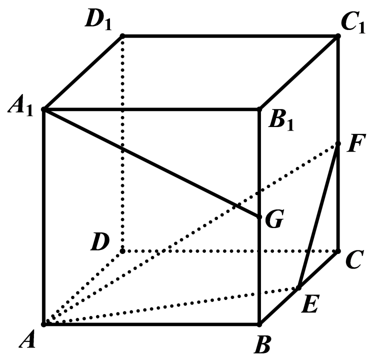


图3

故选：BC

18．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别为 BC，CC_1，BB_1 的中点，则( )



A．$D_1D \perp AF$

B．点 G 到平面 AEF 的距离是点 C 到平面 AEF 的距离的 2 倍

C．A_1G // 平面 AEF

D．直线 A_1G 与 EF 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

【答案】BCD

【分析】

利用反证法判断 A，设 $CG \cap EF = O$，利用相似比计算 $\dfrac{OG}{OC}$ 判断 B，取 B_1C_1 的中点 Q，证明平面 A_1GQ // 平面 AEF 判断 C，在 $\triangle A_1GQ$ 中利用余弦定理计算 $\cos\angle A_1GQ$ 判断 D

【详解】

对于 A，假设 $D_1D \perp AF$，因为 $DD_1 // AA_1$，所以 $AA_1 \perp AF$，显然这是不可能的，所以假设不成立，所以 A 错误，

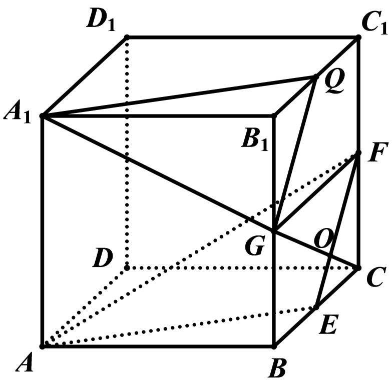
对于 B，连接 GC 交 EF 于 O，连接 GF，则 $\triangle OCE \backsim \triangle OGF$，所以 $\dfrac{OG}{OC} = \dfrac{GF}{CE} = 2$，所以点 G 到平面 AEF 的距离是点 C 到平面 AEF 的距离的 2 倍，所以 B 正确，

对于 C，取 B_1C_1 的中点 Q，连接 GQ，A_1Q，则 $GQ // EF$，$A_1Q // AE$，因为 $GQ \not\subset$ 平面 AEF，$A_1Q \not\subset$ 平面 AEF，$EF \subset$ 平面 AEF，$AE \subset$ 平面 AEF，所以 $GQ //$ 平面 AEF，$A_1Q //$ 平面 AEF，因为 $GQ \cap A_1Q = Q$，所以平面 $A_1GQ //$ 平面 AEF，因为

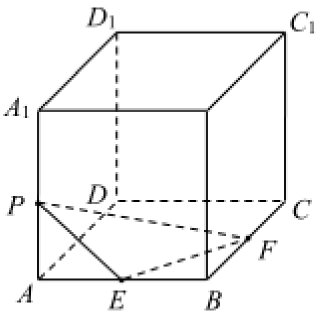
$A_1G\subset$平面A_1GQ,所以A_1G//平面AEF,所以C正确,

对于D,因为GQ//EF,所以$\angle A_1GQ$为异面直线A_1G与EF所成的角或其补角,设正方体的棱长为2,则$A_1G=A_1Q=\sqrt{5}$, $QG=\sqrt{2}$,由余弦定理得$\cos\angle A_1GQ=\dfrac{5+2-5}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,所以$D$正确,

故选:BCD



19．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,$AB=2$,点E,F分别为AB,BC中点,点P满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AA_1}$,$\lambda\in[0,1]$,则(　)



A．当$\lambda=1$时,平面PEF截正方体的截面面积为$\dfrac{9}{4}$

B．三棱锥$P-ECC_1$体积为定值

C．当$\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$时,平面$PEF$截正方体的截面形状为五边形

D．存在点P,二面角$P-EF-A$为45°

【答案】BCD

【分析】

对于A,当$\lambda=1$时,P与A_1重合,从而可得截面为等腰梯形A_1C_1FE,从而可求出其面积,对于B,AA_1//平面ECC_1,所以P到平面ECC_1的距离不变,从而可判断,对于C,当$\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$时,画图可得结论,对于$D$,当点$P$与$A_1$重合时可得结论

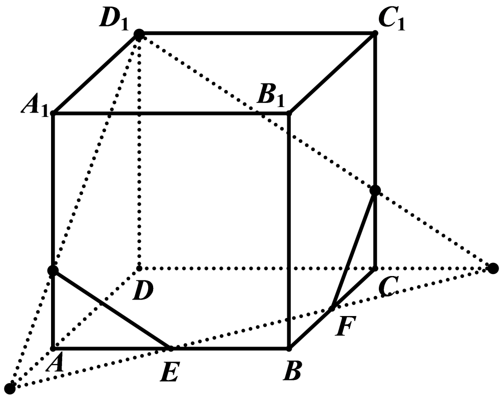
【详解】

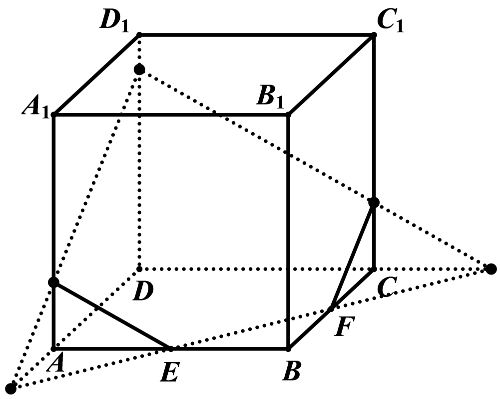
A选项中,当$\lambda=1$时,P与A_1重合,则截面为等腰梯形,其面积为$\dfrac{9}{2}$,故A选项错误;

B选项中,因为AA_1//平面ECC_1,故P到平面ECC_1的距离不变,故三棱锥$P-ECC_1$体积为定值．故B选项正确;

C选项中,当$\lambda=\dfrac{1}{3}$时,其截面刚好为五边形,$0<\lambda<\dfrac{1}{3}$时,截面为五边形;故C选项

正确；



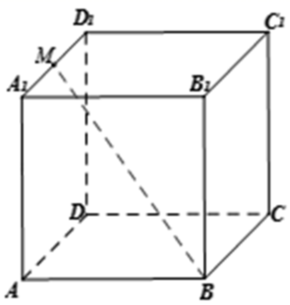


D选项中，当点P与A_1重合时，其二面角正切值为$2\sqrt{2}$，此时二面角大于$45°$，

所以存在点P，二面角$P-EF-A$为$45°$，D选项正确；

故选：BCD.

20．如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M为棱A_1D_1的中点，下列说法正确的是(　)



A．直线$AC\perp$直线BM

B．过点的C的平面$\alpha\perp MB$，则平面α截正方体所得的截面周长为$3\sqrt{2}+\sqrt{5}$

C．若线段BM上有一动点Q，则Q到直线AA_1的距离的最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D．动点P在侧面BCC_1B_1及其边界上运动，且$AP\perp BM$，则AP与平面BCC_1B_1成角正切的取值范围是$\left[\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

【答案】CD

【分析】

对于A：只需证明$AC\perp$平面BB_1D_1D即可得到直线AC与直线BM不垂直；

对于B：取BB_1，AB的中点E，F，根据题意得出平面α截正方体所得的截面为$\triangle CEF$，从而只需求三角形的周长即可；

对于C：过BM构造平面β与AA_1平行，过A作$AH\perp BT$，AH即为Q到直线AA_1的距离的最小值；

对于D：构造两次线面垂直，得到Q点的轨迹为B_1Q，由此能求出AP与平面BCC_1B_1成角正切的取值范围.

【详解】

对于A：$\because AC\perp BD$，$AC\perp BB_1$，$BD\cap BB_1=B$，BD，$BB_1\subset$平面BB_1D_1D，

$\therefore AC\perp$平面BB_1D_1D，

假设$AC\perp BM$，又因为$AC\perp BB_1$，$BM\cap BB_1=B$，BM，$BB_1\subset$平面BB_1M，

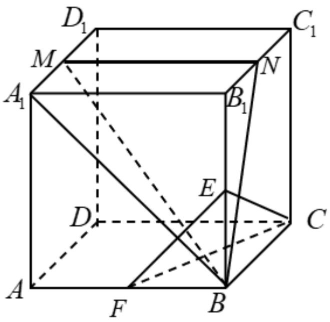
所以 $AC \perp$ 平面 BB_1M，

此与 $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D 矛盾，所以直线 AC 与直线 BM 不垂直，故选项 A 错误；

对于 B：如图，取 BB_1，AB 的中点 E，F，连接 CE，EF，CF.

因为 $BN \perp CE$，$EF \perp A_1B$，由三垂线定理得 $BM \perp CE$，$BM \perp EF$，所以 $BM \perp$ 平面 CEF，

所以 α 截正方体所得的截面为 $\triangle CEF$，故周长为 $\sqrt{1+4}+\sqrt{1+4}+\sqrt{1+1}=2\sqrt{5}+\sqrt{2}$，故 B 错误；

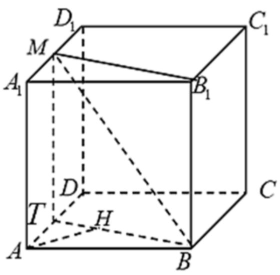


对于 C：如图取 $AT=TD$，则平面 BB_1MT 与 AA_1 平行，过 A 作 $AH \perp BT$，

因为 $BB_1 \perp$ 面 $ABCD$，$AH \subset$ 面 $ABCD$，所以 $BB_1 \perp AH$，

又因为 $BB_1 \cap BT=B$，所以 $AH \perp$ 面 BB_1MT，

所以 AH 即为 Q 到直线 AA_1 的距离的最小值，$AH=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故 C 正确；



对于 D：如图，取 CC_1 的中点 Q，由证明选项 B 可知，$BM \perp$ 面 EFC，

又 $EF \subset$ 面 EFC，$CE \subset$ 面 EFC，所以 $BM \perp EF$，$BM \perp CE$，

又因为在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E, F, Q 分别为棱 BB_1, BA, CC_1 的中点，

所以 $EF \parallel AB_1$，$EC \parallel B_1Q$，所以 $BM \perp AB_1$，$BM \perp B_1Q$，

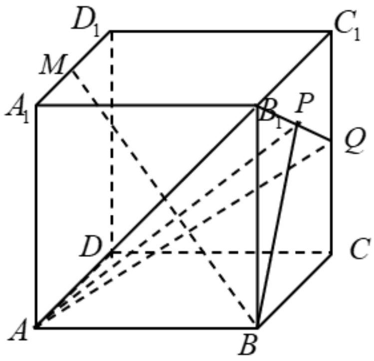
又因为 $AB_1 \cap B_1Q=B_1$，所以 $BM \perp$ 平面 AB_1Q，故 P 点轨迹为 B_1Q.

在正方形 BCC_1B_1 中，当 P 与 Q 重合时，BP 最大；当 $BP \perp B_1Q$ 时，BP 最小.

所以 $BP \in \left[\frac{4\sqrt{5}}{5},\sqrt{5}\right]$，

因为 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $\angle APB$ 为 AP 与平面 BCC_1B_1 所成的角，$\tan\angle APB=\frac{AB}{BP} \in \left[\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$，

则 AP 与平面 BCC_1B_1 成角正切的取值范围是 $\left[\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$，故 D 正确.



故选：CD.