数列最值问题

丁继军 2020.4.6

一、 问题简述

（1） 求解 $\lambda \ge f(n)(\le f(n))$ 恒成立，存在性问题；

（2） 求数列 c_n 的最大值或最小值问题.

二、 运用模式

（1）利用函数 $f(n)$ 求最值（注意 $n \in \mathbf{N}^*$ ）；

（2）利用数列单调解不等式：最大值有 $\begin{cases} a_n \ge a_{n+1} \\ a_n \ge a_{n-1} \end{cases}$ ，最小值有 $\begin{cases} a_n \le a_{n+1} \\ a_n \le a_{n-1} \end{cases}$.

三、 相关知识

（1）双勾函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}(a>0)$ 与反比例 $y=a+\dfrac{k}{x+b}$ 的图像及性质；

（2）不等式组的解，注意变量在数列中只能取正整数.

例 1. 【2019.11 台州一中模拟】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{2a_n-1}{a_n}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）求证：数列 $\{\dfrac{1}{a_n-1}\}$ 是等差数列；（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（3）记 $b_n=\dfrac{1}{na_n}$， T_n 为数列 $\left\{b_{2n-1}\cdot b_{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和，若 $T_n\le\dfrac{\lambda}{b_{n+3}}$ 对任意的正整数 n 都成立，求实数 λ 的最小值.

解析：（1）证明： $\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{a_n}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=1=$ 常数，故数列 $\{\dfrac{1}{a_n-1}\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列；

（2）由（1）可得： $\dfrac{1}{a_n-1}=n\Rightarrow a_n=\dfrac{n+1}{n}$

（3）由（2）可得： $b_n=\dfrac{1}{n+1},\therefore b_{2n-1}\cdot b_{2n+1}=\dfrac{1}{2n(2n+2)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

所以 $T_n=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{4(n+1)}$， 即 $\lambda\ge\dfrac{n}{4(n+1)}\cdot\dfrac{1}{n+4}=\dfrac{n}{4\left(n^2+5n+4\right)}=\dfrac{1}{4\left(n+5+\dfrac{4}{n}\right)}$

$$\frac{1}{4\left(n+5+\frac{4}{n}\right)} \le \frac{1}{36} \Rightarrow \lambda \ge \frac{1}{36}$$

2.【2019.11 绍兴一中期中】已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{a_n a_{n-1}}{2a_{n-1}-a_n}\left(n\ge 2,n\in \mathrm{N}^*\right)$，且$a_1=3a_2=1$

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若对任意$n\in N^*$，都有$\lambda a_n \ge \frac{n}{2^n}$恒成立，求实数$\lambda$的最小值

解析：（1）$a_{n+1}=\frac{a_n a_{n-1}}{2a_{n-1}-a_n} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_{n-1}-a_n}{a_n a_{n-1}}=\frac{2}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{2}{a_n}$

故$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为等差数列，所以$\frac{1}{a_n}=2n-1 \Rightarrow a_n=\frac{1}{2n-1}$

（2）$\lambda a_n \ge \frac{n}{2^n} \Rightarrow \lambda \ge \frac{n(2n-1)}{2^n} \Rightarrow \lambda \ge (\frac{n(2n-1)}{2^n})_{\max}$，令$b_n=\frac{n(2n-1)}{2^n}$，由不等式$\begin{cases} b_n \ge b_{n+1} \\ b_n \ge b_{n-1} \end{cases}$得：

$$\begin{cases} \frac{n(2n-1)}{2^n} \ge \frac{(n+1)(2n+1)}{2^{n+1}} \\ \frac{n(2n-1)}{2^n} \ge \frac{(n-1)(2n-3)}{2^{n-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n(2n-1) \ge (n+1)(2n+1) \\ n(2n-1) \ge 2(n-1)(2n-3) \end{cases} \Rightarrow \frac{5+\sqrt{33}}{4} \le n \le \frac{9+\sqrt{33}}{4}$$

所以：当$n=3$时，b_n取最大值，故$\lambda \ge \frac{15}{8}$.

例 2.【东中 2019 第一学期高三期中】已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，点(a_n,S_n)在直线$3x-2y-2=0$上.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$b_n=\frac{a_n}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)}$，其前$n$项和为$T_n$，问$4T_n+\frac{1}{S_n+2}$是否为定值？若是，求出定值；若不是，请说明理由.

解析：（1）因$3a_n-2S_n-2=0, \Rightarrow 3a_{n-1}-2S_{n-1}-2=0(n\ge 2)$，作差得：$a_n=3a_{n-1}$，当$n=1$时符合；

且$a_1=2$，故$a_n=2\cdot 3^{n-1}, S_n=3^n-1$；

（2）$b_n=\frac{3^{n-1}}{2(3^{n-1}+1)(3^n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^{n-1}+1}-\frac{1}{3^n+1}\right)$，所以$T_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^n+1}\right)$，

所以$4T_n+\frac{1}{S_n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^n+1}+\frac{1}{3^n+1}=\frac{1}{2}=$定值。

四、 知识运用，解决问题

1.【2019.11 杭四中（吴山）高三期中】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2},a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2^n}$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=2^n a_n$.

（1）求证：数列$\{b_n\}$是等差数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$c_n=\frac{n(n+1)}{2^n(n-a_n)(n+1-a_{n+1})}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求满足$T_n<\frac{124}{63}(n\in N^*)$的$n$的最大值.

解析：（1）证明：$b_n-b_{n-1}=2^n a_n-2^{n-1}a_{n-1}=2^{n-1}a_{n-1}+1-2^{n-1}a_{n-1}=1$，且$b_1=1$，

所以数列$\{b_n\}$是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，即$b_n=n$，故$a_n=\frac{n}{2^n}$；

（2）$c_n=\frac{n(n+1)}{2^n\left(n-\frac{n}{2^n}\right)\left(n+1-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)}=\frac{2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=2\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$

即$T_n=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$，又因$2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<\frac{124}{63}\Rightarrow 2^{n+1}<64\Rightarrow n<5$，故$n$的最大值是 4

2.【2019. 11 义乌高三模拟】已知正项数列$\{a_n\}$，满足$2\sqrt{S_n}=a_n+1$，其中S_n为$\{a_n\}$的前n项和.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）已知数列$b_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{a_n+1}{a_n a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$，并求出满足$T_n\geq\frac{m^2+m}{5}$对$n\in\mathrm{N}^*$恒成立时，实数$m$的取值范围；

解析：（1）由$2\sqrt{S_n}=a_n+1\Rightarrow 4S_n=a_n{}^2+2a_n+1$，当$n\geq 2$时，有$4S_{n-1}=a_{n-1}{}^2+2a_{n-1}+1$，作差得：

$4a_n=a_n^2+2a_n-a_{n-1}^2-2a_{n-1}\Rightarrow a_n-a_{n-1}=2$，当$n=1$时有$a_1=1$，所以$a_n=2n-1$；

（2）$b_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{a_n+1}{a_n a_{n+1}}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$

①当n为奇数时：$T_n=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2n+1}\right]$

此时 T_n 单调递减，故 $\frac{2}{3}=T_1\ge T_n>\frac{1}{2}$；

② n 为偶数时：$T_n=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]$

此时 T_n 单调递增，故 $T_n\ge T_2=\frac{2}{5}$；

由 $T_n\ge\frac{m^2+m}{5}\Rightarrow\left(T_n\right)_{\min}\ge\frac{m^2+m}{5}\Rightarrow\frac{2}{5}\ge\frac{m^2+m}{5}\Rightarrow m\in[-2,1]$

3.【2019.9 浙江省名校协作体】已知等差数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_2=1,b_1=a_3\ne0,$ 且 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=(n-2)2^{n+1}+4,n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $\left\{\frac{b_n}{a_{b_n}a_{b_{n+1}}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，若 $T_n>\frac{2018}{2019}$，求 n 的最小值.

解析：（1）当 $n=1$ 时，$a_1\cdot b_1=S_1=0,b_1\ne0$，则 $a_1=0$，由 $a_2=1$，$\{a_n\}$ 是等差数列可得 $a_n=n-1$；

当 $n\ge2$ 时，$a_n\cdot b_n=S_n-S_{n-1}=(n-2)\cdot2^{n+1}-(n-3)\cdot2^n=(n-1)\cdot2^n$，故 $b_n=2^n$；当 $n=1$ 时，$b_1=a_3=2$，

即 $b_n=2^n$（$n\in\mathrm{N}^*$）.

（2）$\frac{b_n}{a_{b_n}\cdot a_{b_{n+1}}}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$，故

$T_n=\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$，由 $T_n>\frac{2018}{2019}$ 可得 $2^{n+1}>2020$，解得 n 的最小值为 10.

4.【2019.11 嘉兴一中高三期中】已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，且满足 $a_4+a_6=8(a_1+a_3)$，S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，且 $n(n+1)\cdot b_{n+1}=S_n\cdot S_{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right).a_1=1,b_1=\frac{1}{2}$.

（1）求 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=\frac{1}{(n+1)a_nb_n}$，$T_n$ 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和，若对任意的正整数 n，$T_n+\lambda c_n<4$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

解析：（1） $a_4+a_6=8\left(a_1+a_3\right)\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q=2$，所以 $a_n=2^{n-1}$

$n\left(n+1\right)\cdot b_{n+1}=S_n\cdot S_{n+1}\Rightarrow n\left(n+1\right)\cdot\left(S_{n+1}-S_n\right)=S_n\cdot S_{n+1}\Rightarrow\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，即 $\frac{1}{S_n}=\frac{n+1}{n}$

所以 $b_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\left(n\geq2\right)$，当 $n=1$ 时， $b_1=\frac{1}{2}$ 符合，故 $b_n=\frac{1}{n\left(n+1\right)}$

（2） $c_n=\frac{1}{\left(n+1\right)a_nb_n}=\frac{n}{2^{n-1}}$，

由错位相减得： $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}$ （1）

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$ （2）

两式相减得： $\frac{1}{2}T_n=1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$，求得： $T_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$.

所以 $T_n+\lambda c_n<4\Rightarrow\lambda<\frac{n+2}{n}\Rightarrow\lambda<1$.

五、 小结

（1） 分离变量转化为：$\lambda\geq f(n)\left(\leq f(n)\right)$ 恒成立，存在性问题；

（2） 初等函数型：转化为求函数 $f\left(n\right)$ 的最值（注意 $n\in\mathbf{N}^*$ ）；

（3） 组合函数型：利用数列单调解不等式：最大值有 $\begin{cases}a_n\geq a_{n+1}\\a_n\geq a_{n-1}\end{cases}$，最小值有 $\begin{cases}a_n\leq a_{n+1}\\a_n\leq a_{n-1}\end{cases}$.

六、 练习

1. 【2019.10 东阳模拟】若数列 $\left\{a_n\right\}$ 是公差为 2 的等差数列，数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足 $b_1=1,b_2=2$，且 $a_nb_n+b_n=nb_{n+1}$.

（1）求 $\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$ 数列的通项公式；

（2）设数列 $\left\{c_n\right\}$ 满足 $c_n=\frac{a_n+1}{b_{n+1}}$，数列 $\left\{c_n\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，若不等式 $(-1)^n\lambda<T_n+\frac{n}{2^{n-1}}$ 对一切 $n\in\mathrm{N}^*$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

解析：（1）由 $a_nb_n+b_n=nb_{n+1}$，令 $n=1$ 得：$a_1=1\Rightarrow a_n=2n-1$；所以 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，故 $b_n=2^{n-1}$；

（2）$c_n=\dfrac{a_n+1}{b_{n+1}}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

由错位相减得：$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^1}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$（1）

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$（2）

两式相减得：$\dfrac{1}{2}T_n=1+(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}})-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$，求得：$T_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$.

$(-1)^n\lambda<T_n+\dfrac{n}{2^{n-1}}\Rightarrow(-1)^n\lambda<4-\dfrac{2}{2^{n-1}}$；

当 n 为奇数时：$-\lambda<4-\dfrac{2}{2^{n-1}}\Rightarrow\lambda>\dfrac{2}{2^{n-1}}-4\Rightarrow\lambda>\left(\dfrac{2}{2^{n-1}}-4\right)_{\max}$，因 $\dfrac{2}{2^{n-1}}-4$ 单调递减，故 $\lambda>-2$

当 n 为偶数时：$\lambda<4-\dfrac{2}{2^{n-1}}\Rightarrow\lambda<\left(4-\dfrac{2}{2^{n-1}}\right)_{\min}$，因 $4-\dfrac{2}{2^{n-1}}$ 单调递增，故 $\lambda<2$，所以：$-2<\lambda<2$

2.【温州市 2019 届高三 2 高考适应性】设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_2=8$，$2S_n=(n+1)a_n+n-1$.

（1）求 a_1，a_2 并证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

（2）若不等式 $\lambda\cdot2^n-S_n>0$ 对任意正整数 n 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

解析：（1）因为 $2S_n=(n+1)a_n+n-1$，所以 $2S_2=3a_2+1$，又 $S_2=8$，所以 $a_2=5$，所以 $a_1=3$.

由 $2S_n=(n+1)a_n+n-1$，可得 $2S_{n+1}=(n+2)a_{n+1}+n$，上述两式相减可得

$2a_{n+1}=(n+2)a_{n+1}-(n+1)a_n+1$，即 $na_{n+1}-(n+1)a_n+1=0$　①，

所以 $(n+1)a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}+1=0$　②，由②－①可得 $(n+1)a_{n+2}-(2n+2)a_{n+1}+(n+1)a_n=0$，

所以 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$，即 $a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$，所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

（2）由（1）可得 $a_n=2n+1$，所以 $S_n=n^2+2n$，因为不等式 $\lambda\cdot2^n-S_n>0$ 对任意正整数 n 恒成立，

所以$\lambda > \frac{n(n+2)}{2^n}$对任意的正整数$n$恒成立，所以$\lambda > [\frac{n(n+2)}{2^n}]_{\max}$，令$b_n = \frac{n(n+2)}{2^n}$，

所以$b_{n+1} - b_n = \frac{3-2n^2}{2^{n+1}}$，所以$b_1 < b_2 > b_3 > b_4 > \cdots$，所以$(b_n)_{\max} = b_2 = 2$，$\lambda > 2$．

故实数λ的取值范围为$(2,+\infty)$．

3．【湖州三校】已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1 = 1$，公差$d \neq 0$，且S_1，S_3，S_9成等比数列，数列$\{b_n\}$满足$b_1S_1 + b_2S_2 + \cdots + b_nS_n = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}(n \in \mathbf{N}^*)$，$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$．

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$R_n = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}}$，试比较$R_n$与$\frac{1}{2}T_n$的大小．

解析：（1）因为S_1，S_3，S_9成等比数列，所以$S_3^2 = S_1 \cdot S_9$，所以$(3+3d)^2 = 9+36d$，即$d(d-2)=0$，又$d \neq 0$，所以$d=2$，因为$a_1 = 1$，所以$a_n = 2n-1$，$S_n = n^2$．

因为$b_1S_1 + b_2S_2 + \cdots + b_nS_n = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}(n \in \mathbf{N}^*)$，

所以$b_1 \times 1^2 + b_2 \times 2^2 + \cdots + b_n \times n^2 = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}$，

令$n=1$，可得$b_1 \times 1^2 = 6 - \frac{1^2+4\times1+6}{2^1}$，即$b_1 = \frac{1}{2}$．

易得当$n \geq 2$时，$b_1 \times 1^2 + b_2 \times 2^2 + \cdots + b_{n-1} \times (n-1)^2 = 6 - \frac{(n-1)^2+4(n-1)+6}{2^{n-1}}$，

所以$b_n \times n^2 = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n} - 6 + \frac{(n-1)^2+4(n-1)+6}{2^{n-1}}(n \geq 2) = \frac{n^2}{2^n}$．所以$b_n = \frac{1}{2^n}(n \geq 2)$，

显然$b_1 = \frac{1}{2}$也满足上述，所以$b_n = \frac{1}{2^n}$．

（2）由（1）知$b_n = \frac{1}{2^n}$，所以$T_n = 1 - \frac{1}{2^n}$，所以$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})$．

由题可得$R_n = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$，

当 $n=1$ 时，$2^1<2\times1+1=3$，所以 $R_1>\frac{1}{2}T_1$；

当 $n=2$ 时，$2^2<2\times2+1=5$，所以 $R_2>\frac{1}{2}T_2$；

当 $n\geq3$ 时，$2^n=(1+1)^n=1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots>1+n+\frac{n(n-1)}{2}\geq2n+1$，所以 $R_n<\frac{1}{2}T_n$.

综上，当 $n\leq2$ 时 $R_n>\frac{1}{2}T_n$；当 $n\geq3$ 时 $R_n<\frac{1}{2}T_n$.

4.【嘉兴市 2019 届高三第一学期期末检测】在数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 中，设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2$，$3b_1+5b_2+\cdots+(2n+1)b_n=2^n\cdot a_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求 a_n 和 S_n；

（2）若 $n\geq k$ 时，$b_n\geq8S_n$ 恒成立，求整数 k 的最小值.

解析：（1）由 $a_{n+1}=a_n+2$ 可得：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，即：$a_n=2n-1$，$S_n=n^2$；

（2）$3b_1+5b_2+\cdots+(2n+1)b_n=2^n\cdot(2n-1)+1$，当 $n\geq2$ 时：即有

$3b_1+5b_2+\cdots+(2n-1)b_{n-1}=2^{n-1}\cdot(2n-3)+1$，两式作差得：

$(2n+1)b_n=2^n\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow b_n=2^{n-1}$，由 $2^{n-1}\geq8n^2\Rightarrow2^{n-4}\geq n^2\Rightarrow n_{\min}=11$.

5.【台州市 2019 届高三上学期期末质量评估】在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=3$，且对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$.

（1）证明数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{2^n}{a_na_{n+1}}$，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $S_n\geq\frac{1}{a_n}+m$，求实数 m 的取值范围.

解析：（1）证明：$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{3a_{n+1}-2a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=2=$ 常数，故数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列；

$a_{n+1}-a_n=2^n$，由累加得：$a_n=2^n-1$.

（2）$b_n=\dfrac{2^n}{a_na_{n+1}}=\dfrac{2^n}{\left(2^n-1\right)\left(2^{n+1}-1\right)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，所以 $S_n=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，

$S_n\geq\dfrac{1}{a_n}+m\Rightarrow\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}-\dfrac{1}{2^n-1}\right)_{\min}\geq m$，因 $\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}-\dfrac{1}{2^n-1}\right)\nearrow$，所以 $m\leq-\dfrac{1}{3}$.

6.【2019 年 10 月浙江省十校联考】已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，且 $a_1+a_6=a_4$，$S_6=9$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2$，$b_n-b_{n-1}=2^{n-1}\left(n\geq2,n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n，并求 T_n 的最小值.

解析：（1）由数列 $\{a_n\}$ 为等差数列可知：$S_6=\dfrac{(a_1+a_6)\cdot6}{2}=3a_4=9\Rightarrow a_4=3$，$a_3=0$；

故：$d=a_4-a_3=3$ 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为：$a_n=a_3+(n-3)\cdot3=3n-9(n\in N^*)$；

当 $n\geq2$ 时，$b_2-b_1=2^1$，$b_3-b_2=2^2$，$\cdots b_{n-1}-b_{n-2}=2^{n-2}$，$b_n-b_{n-1}=2^{n-1}$，

将上述式子累加得：$b_n-b_1=2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1}=2^n-2$，则：$b_n=2^n(n\geq2)$；

当 $n=1$ 时，$b_1=2^1=2$；综上可得：$b_n=2^n(n\in N^*)$.

（2）法一：设 $c_n=a_n\cdot b_n=(3n-9)\cdot2^n$，则

$T_n=(-6)\cdot2+(-3)\cdot2^1+\cdots+[3n-12]\cdot2^{n-1}+(3n-9)\cdot2^n$ …… ①

$2T_n=(3-9)\cdot2^1+(6-9)\cdot2^2+\cdots+[3(n-1)-9]\cdot2^n+(3n-9)\cdot2^{n+1}$ ……②

① -②式得：$-T_n=-12+3\cdot2^2+\cdots+3\cdot2^n-(3n-9)\cdot2^{n+1}$；

则：$T_n=(3n-12)\cdot2^{n+1}+24(n\in N^*)$；

显然：当 $n\geq4$ 时，$T_n\geq24$ 且单调递增；则依次求出 T_1，T_2，T_3，T_4 比较大小即可；

易得：$T_1=-12$，$T_2=-24$，$T_3=-24$，$T_4=24$，故：$\{T_n\}$ 的最小值为：$(T_n)_{\min}=T_2+T_3=-24$.

法二：设 $c_n=a_n\cdot b_n=(3n-9)\cdot2^n$，则可设 $T_n=(An+B)\cdot2^n-B$，又 $c_1=-12$，$c_2=-12$；

所以 $\begin{cases}T_1=-12\\T_2=-24\end{cases}$，即 $\begin{cases}2A+B=-12\\8A+3B=-24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=6\\B=-24\end{cases}$，所以 $T_n=(6n-24)\cdot2^n+24$；

又 $c_n=(3n-9)\cdot 2^n$，当 $n\le 2$ 时，$c_n<0$；当 $n=3$ 时，$c_3=0$；当 $n\ge 4$ 时，$c_n>0$；

所以 $n=2$ 或 $n=3$ 时，T_n 取到的最小值 $T_2=T_3=-24$.

法三：设 $c_n=a_n\cdot b_n=(3n-9)\cdot 2^n$，又 $(3n-9)\cdot 2^n=(6n-24)\cdot 2^n-(6(n-1)-24)\cdot 2^{n-1}$，

当 $n\ge 2$ 时

$T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{n-1}+c_n=(6n-24)\cdot 2^n-(-18)\cdot 2-12=(6n-24)\cdot 2^n+24$，

又 $T_1=-12$，所以 $T_n=(6n-24)\cdot 2^n+24$；

（此处方法同上）当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，T_n 取到的最小值 -24.

7.【2019 年 10 月浙江省五校联考】设数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，若 $a_2=b_2=3$，$a_3=b_5=9$.

（1）若 $c_n=\dfrac{n\cdot b_n}{a_n}$，数列 $\{c_n\}$ 中的最大项是第 k 项，求 k 的值；

（2）设 $d_n=a_n\cdot b_n$，求数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解析：（1）由题意可得：$a_n=3^{n-1},b_n=2n-1$，所以 $c_n=\dfrac{n\cdot b_n}{a_n}=\dfrac{n\cdot(2n-1)}{3^{n-1}}$，不等式 $\begin{cases}c_n\ge c_{n+1}\\c_n\ge c_{n-1}\end{cases}$ 得：

$$\begin{cases}\dfrac{n(2n-1)}{3^{n-1}}\ge\dfrac{(n+1)(2n+1)}{3^n}\\[2ex]\dfrac{n(2n-1)}{3^{n-1}}\ge\dfrac{(n-1)(2n-3)}{3^{n-2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3n(2n-1)\ge(n+1)(2n+1)\\n(2n-1)\ge 3(n-1)(2n-3)\end{cases}\Rightarrow\frac{3+\sqrt{13}}{4}\le n\le\frac{7+\sqrt{13}}{4}$$

所以：当 $n=2$ 时，c_n 取最大值，故 $k=2$.

（2）$d_n=a_n\cdot b_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}$ 则

$T_n=1\cdot 3^0+3\cdot 3^1+\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-2}+(2n-1)\cdot 3^{n-1}\cdots\cdots$ ①

$3T_n=1\cdot 3^1+3\cdot 3^2+\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-1}+(2n-1)\cdot 2^n\cdots\cdots$②

①-②式得：$-2T_n=1+2\cdot(3^1+\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot 3^n$；则：$T_n=(n-1)\cdot 3^n+1$；