

栏目主持:张莫宙

“向量加法运算及其几何意义”教学设计

——基于核心素养背景下的向量欣赏

任伟芳(浙江省宁波市教育局教研室)

叶琪飞(浙江省宁波市鄞州高级中学)

1 教学分析

1.1 教材分析

本节课选自人教A版《数学4》(必修)第二章“平面向量”第二节“平面向量的线性运算”第一课时。学生之前已经学习了向量的概念和表示方法等有关内容,知道了向量区别实数的最大特征,是向量不仅有大小还有方向。向量是近代数学中重要的数学概念,它是沟通代数、几何、三角的一种工具,其工具性主要体现在运算方面,如果没有运算,向量只是一个“路标”,因为有了运算,向量才能显示其巨大的威力。通过类比实数的运算及以位移的合成、力的合力两个物理模型的数学抽象为背景引入向量加法运算。向量加法运算是学习向量减法、数乘和数量积等数学运算的基础,因此向量加法运算起着承上启下的作用。向量加法的运算律是通过画图验证得到的,这种利用画图来证明等式成立的方法是学生思维上的一种突破。通过利用与实数进行类比的研究方法,培养了学生的逻辑推理能力。本节课的教学重点:向量加法运算的定义及其几何意义、向量加法的三角形法则与平行四边形法则;培育学生数学抽象、逻辑推理、数学建模和直观想象等核心素养,同时欣赏平面向量加法的和谐美与结构美。

1.2 教学目标

知识与技能:理解向量的加法定义,会用向量加法的三角形法则和平行四边形法则作出两个向量的和向量;掌握向量加法的运算律,并会用它们进行向量计算。

过程与方法:经历向量加法概念、法则的建构过程,通过观察、类比、归纳等步骤在动手探究、合作交流中自主学习,体会数形结合、分类讨论等数学思想方法。

情感、态度与价值观:在数学建模过程中运用数学来描述和刻画现实世界,激发学生的学习热情;通过运用数形结合的思想方法让学生体会数学图形结构之美;利用向量的平行四边形法则获得启示,只有方向尽可能一致时,实际的速度会更快些,比喻学习中要利用一切有利因素,才能到达理想的彼岸,从而体会数学的内在和谐与人文意境。

2 课堂片段

2.1 运用类比,给出任务

教师:同学们在十几年的数学学习过程中,始终跟两类对象打交道,就是数与形。对数的学习,我们经历了如下的一些学习过程,学习数的概念、数的运算、数的运算律、数的运算应用举例等。学习数的方法来源于生产生活实践。上节课我们学习了一个全新的概念是什么?

学生(众):向量。

教师:对于向量如何开展学习?首先我给大家介绍一位天文学家开普勒,他曾经说:“我珍视类比胜过任何别的东西,它是最可信赖的老师”,其实类比是一切创造发明的源泉。下面请大家通过模仿对数的研究过程,设计向量学习的清单。

学生1:向量的学习过程大致为,先学习向量的概念,然后向量的运算、向量的运算律、向量的运算应用举例等。

设计意图:“数学是充满联系的,不要教孤立的片段,应该教联系的材料”^[1]。数的研究程序:概念、运算、运算律、应用举例。与研究数的结构类比,数有加、减、乘、除;式也有加、减、乘、除;函数也有加、减、乘、除,平面向量呢?结构是什么?首先要定义加法,它是一切运算的基础,让一切都顺理成章,从而使学生体会平面向量的结构之美。

2.2 概念同化,贵在迁移

教师:我们先从向量加法运算入手。去西安开会乘飞机有两种方案,第一种方案:从宁波出发,先到上海办事,然后转机飞到西安;第二种方案:直接飞往西安。从位移的角度来看,第一种方案两次位移的结果与第二种方案一次位移的结果如何?

学生(众):相同。

教师:去掉物理背景,第一种方案可以看成两个向量的求和。再举一个例子,长江两岸之间没有大桥的地方,常常通过轮渡进行运输,长江上的渡轮的速度从矢量运算角度来看与什么有关系?

学生2:船在静水中的速度和水速。

教师:从运算的角度看,船实际的行驶速度 v 可以认为是船在静水中的速度 v_1 与水流的速度 v_2 的和。从代数的角度进行类比,刚才所接触的位移的合成和速度的合成,以及我们非常熟悉的物理中力的合成,这些都是向量的什么?

学生3:物理模型。

教师:从物理模型中可以抽象出向量加法的定义。

设计意图:概念同化是利用学习者认知结构中已有的概念,以定义的方式直接给学习者提示概念的关键特征,从而使学习者获得概念的方式。在物理学科中,位移的合成及速度、力的合成都是向量加法的物理模型,在矢量的合成中学生对三角形法则与平行四边形法则都了然于心。在数学学科中为什么还要学习向量加法呢?相比矢量,向量更具有一般性和普适性,向量的起点是随意的,只要方向和长度确定,可以自由平行移动,向量加法教学需在原有矢量合成概念的同化中寻找差异和对知识的迁移。

2.3 自主探究,合作交流

教师:由于数学中向量是抽象现实生活后的概念,不一定是共起点与首尾连接。这时候我们怎么办呢?

学生4:向量是自由向量,通过平行移动转化为共起点与首尾连接(教师动画展示不共线向量作向量和的三角形法则与四边形法则)。

教师:在向量求和的过程中,三角形法则与平行四边形法则之间有什么区别和联系?

学生5:两个向量首尾连接,从起始向量起点指向另一向量的终点;两个向量起点一致,构造平行四边形,共起点对角线为和向量。

师生共同归纳、概括平行四边形法则口诀:“首尾相接,起指终”和三角形法则口诀“共起点,对角和”。

教师:我们用两个实物向量演示,验证“首尾连”“共起点”,移动两个道具向量,如果两个向量共线,和向量有没有?

学生6:共线时,平行四边形法则没有和向量,三角形法则有和向量,因此它的“口诀”可以借用到共线中。

探究1:共线的两个向量和的作法。

作同向共线、反向共线的和向量时要求在每个向量的起点和终点标上大写字母,便于说明和向量是在哪里。第一、二组作同向共线和向量,第三、四组作反向共线和向量,自己完成后把另外两组的任务也完成,教师巡视。

请两位学生在实物投影仪上展示。教师小结,强调借用三角形法则的“口诀”——首尾连,起点指向终点。

探究2:向量的运算律。

教师提问,学生四人一组,分组交流,了解学生思考问题的进展与过程,鼓励学生在学习了两种求和方法的认知基础上通过作图突破思维的障碍,学习小组展示成果,学生在合作探究中得出结论: $(a+b)+c=a+(b+c)$ 。教师让学生明确探究途径是使用加法法则作图研究,并且作图需要设计,选择理想的方法,清晰表述证明过程。学生合作交流、自主探究,通过画图动手验证,完成对相关运算律的证明。

设计意图:新课程改革倡导自主探究、合作,要改变学生的学习方式。对向量及其运算法则和运算律的合作探究和分组讨论,学生经历知识的发现过程,感受解决问题的喜悦,教师在这个过程中作为参与者、引导者、合作者,充分体现了教师的主导作用和学生的主体作用。基于培育核心素养的课堂教学,要更新观念,不能依赖模仿、记忆,需要理解、感悟,更需要探究、交流,将以生为本的理念落实到实际教学中去。类比实数加法有交换律、结合律,向量与实数有类似的性质体现了运算和谐之美。

2.4 数学建模,学以致用

教师:在引入新课的时候,向大家展示了长江上渡轮的速度合成,下面我加入一些数据,考查大家学以致用能力。

例 长江两岸之间没有大桥的地方,常常通过轮渡进行运输,一艘船从长江南岸A点出发,以 $2\sqrt{3}$ km/h的速度向垂直于对岸的方向行驶,同时江水的速度为向东2 km/h。

(1)试用向量表示江水速度、船速以及船的实际航行速度;

(2)求船实际航行速度的大小与方向。(用与江水速度间的夹角表示)

学生7:作平行四边形,用平行四边形法则可以得到和向量 \vec{AC} ,这个平行四边形比较特殊是矩形,从而用勾股定理算出斜边。根据直角三角形边角关系不难算出所求角度为 60° 。

设计意图:宁波去西安发生的位移和流水行船之力学,这两个实例显现了向量加法与现实生活的和谐之美。从“位移”“速度”等实际问题中引入向量加法运算的概念,把物理量之间的关系抽象为数学模型,然后再通过对这个数学模型的研究来解释日常生活中长江渡船的物理现象,充分体现了向量应用的内涵和广泛性。数学建模教学本身是一个不断探索、创新、完善的过程,因此教学中突出培养学生核心素养的目的,采用以生为本、自主探究、合作交流和分享成果等教学方式,从而让学生充分体会数学建模的功效。

2.5 课堂小结,升华境界

教师:向量加法运算是向量运算中最基本的一种运算,由平行四边形法则可以知道,只有几个速度的方向尽可能一致时,实际航行的速度会更快些。因此“和”是中国文化的特征向量,是我们所要追求的最高境界。回想起俄国画家列宾的名画《伏尔加河上的纤夫》,纤绳合众人之力保证前行速度。如果众人合力越一致,那么船前进的速度就越快,体现了合力之美。如果全国人民齐心协力,推动中国巨轮航行,就能实现中华民族伟大复兴的中国梦。最后祝愿同学们在今后的学习中乘风破浪,利用一切有利因素,目标一致,坚持不懈,顺利到达理想的彼岸。

设计意图:小结这番话体现了数学的文化价值,实现了数学知识与数学文化的巧妙融合,做到“润物细无声”地欣赏向量和的合力之美,课堂上利用数学内在的和谐,合理直观的人文意境来感悟数学之美是数学欣赏的新尝试。

参考文献:

- [1] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 上海:上海教育出版社,1995.
- [2] 章建跃. 数学教育之取势明道优术[J]. 数学通报, 2014, 53(10):1-6.
- [3] 张奠宙. 数学教育随想集[M]. 上海:华东师范大学,2013.

主持人点评:

数学课堂上的美学欣赏,从任伟芳、叶琪飞等两位老师的教学设计来看,已经步入了深水区。

欣赏数学之美,起初只是外观之美(第一个层

次)。例如,圆的对称之美。“大漠孤烟直,长河落日圆”的描绘。多边形之美,尽显于国家标识、企业广告的几何图案之中。现代则有分形几何的绚丽画面令人惊叹不止。第二个层次,是围绕数学的“高”与“妙”展开的惊叹之美。大的如徐光启对《几何原本》的“五不必”赞叹,赵爽的弦图给出的“证明”,小的如高斯的“首尾相加求和法”,甚至只是一条辅助线的添加,令人觉得“妙不可言”“美不胜收”。第三个层次,则要进入“数学规律和谐”之美的天地。曾有调查说,最美的数学公式是韦达定理,其反映的是根与系数关系。理由就是“深刻”,把已知和未知如此明白地联结在一组公式里,具有震撼人心之美。我也曾将二次方程的求根公式比喻做《巴黎圣母院》里的卡西莫多,外貌丑怪却内心美尚的好人。这种体现数学“美好”的例子很多。就像一些不起眼的瓦罐、纸片、残件却是无上珍品。

在欣赏数学美好的层次中,有一部分则是欣赏数学的优美结构。数学不研究大自然的具体事物的运动形态。研究对象乃是人们抽象之后形成的数、式、方程、函数、图形以及向量等思想材料。本文涉及的就是平面向量的结构,第一课时是加法。如果把平面向量作为一座建筑物。那就要有四梁八柱的结构支撑起来。参考有理数、实数、多项式、函数等对象,其结构中都有加法。因此,平面向量的第一根柱子就是规定加法,有了加法就会有相应的减法。平面向量的大厦一半就撑起来了。平面向量运算教学设计由此拉开了序幕。

一个运算的规定,必须与整个环境和谐相处。首先是实际情境的融合,本设计有位移和船速两例支撑,这是第一层和谐。接着是交换律、结合律的算法和谐(第二层和谐)。然后是减法的引进,那是第三层和谐(需要数乘运算,下节课处理)。

当我们自主给定的平面向量加法,有以上三层和谐之后,就会感到一种美好的喜悦。我想,这便是欣赏数学美的结果了。

平面向量没有真正的“乘法”,但是有数量积。这是一种不同于实数系的特殊结构。我们不必细究,却应该能够欣赏。这也是理解和运用平面向量的一个不可分割的组成部分。本单元结束时应加以梳理。

至于油画《伏尔加河上的纤夫》的评说,那是任课教师个人发挥的领域,怎么合适有效怎么做,无须千篇一律。不过,作为一种欣赏,欣赏油画,和欣赏结构放在一起,还是很不错的设计。